

(1)

$2^x = t$ とおくと, x が実数のとき, t の変域は $t > 0$ である. t を用いて方程式を表すと,

$$\begin{aligned} 4^x - 2^{x+1}a + 8a - 15 &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2 - 2at + 8a - 15 &= 0 \end{aligned}$$

となる. $t = 2^x$ は x についての単調増加関数より, t と x は 1 対 1 に対応する. よって, t についての方程式 $t^2 - 2at + 8a - 15 = 0$ が正の実数解をただ 1 つ持つ条件を考える.

$g(t) = t^2 - 2at + 8a - 15$ とおくと, 求める条件は, $g(t) = 0$ が正の重解を持つ, または $g(t) = 0$ が正と負の実数解を 1 つずつ持つ, または $g(t) = 0$ が 0 と正の実数解を持つことである. 以下, この 3 つの場合について場合分けを行う.

[1] $g(t) = 0$ が正の重解を持つとき

判別式を D とすると,

$$\frac{D}{4} = a^2 - 8a + 15$$

であり, 重解を持つとき,

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 8a + 15 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a-3)(a-5) &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= 3, 5 \end{aligned}$$

である. また, 重解を持つことから,

$$g(t) = (t-a)^2$$

となるため, 重解は a である. 重解が正であることより,

$$a > 0$$

となり, $a = 3, 5$ はこれをみたす. よって,

$$a = 3, 5$$

である.

[2] $g(t) = 0$ が正と負の解を 1 つずつ持つとき

$$\begin{aligned} g(0) &< 0 \\ \Leftrightarrow 8a - 15 &< 0 \\ \Leftrightarrow a &< \frac{15}{8} \end{aligned}$$

である.

[3] $g(t) = 0$ が 0 と正の解を持つとき

$g(0) = 0$ が成り立つため,

$$\begin{aligned} g(0) &= 0 \\ \Leftrightarrow 8a - 15 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= \frac{15}{8} \end{aligned}$$

となる. 解と係数の関係より, もう 1 つの解を s とおくと,

$$\begin{aligned} s + 0 &= -(-2a) \\ \Leftrightarrow s &= 2a \\ \Leftrightarrow s &= \frac{15}{4} \end{aligned}$$

となり, $g(t) = 0$ は 0 と正の解を持つ. ゆえに,

$$a = \frac{15}{8}$$

である.

以上 [1], [2], [3] より, 求める a の範囲は,

$$a \leq \frac{15}{8}, \quad a = 3, 5$$

となる.

$$(\text{答}) \quad a \leq \frac{15}{8}, \quad a = 3, 5$$

(2)

条件は, $g(t) = 0$ が $t \geq 2$ をみたす相異なる 2 つの実数解を持つことである. よって, $D > 0$ であり, 軸の t 座標が $t > 2$ をみたし, $g(2) \geq 0$ となる a の範囲を求める. $D > 0$ より,

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &> 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 8a + 15 &> 0 \\ \Leftrightarrow a &< 3, 5 < a \end{aligned}$$

である. $g(t) = (t-a)^2 - a^2 + 8a - 15$ より, 軸は $t = a$ である. よって, 軸の条件より,

$$a > 2$$

である. また,

$$\begin{aligned} g(2) &= 4 - 4a + 8a - 15 \\ &= 4a - 11 \end{aligned}$$

であるから, $g(2) \geq 0$ の条件は,

$$a \geq \frac{11}{4}$$

である. 以上より, 求める条件は $a < 3, 5 < a$ かつ $a > 2$ かつ $a \geq \frac{11}{4}$ であり, まとめると, $\frac{11}{4} \leq$

$a < 3, a > 5$ となる.

$$(\text{答}) \quad \frac{11}{4} \leq a < 3, \quad a > 5$$

(1)

$a_1 = 1, a_3 = 7, b_n = \log_2(a_n + 1)$ より,

$$b_1 = \log_2 2 = 1, b_3 = \log_2 8 = 3$$

である。 $\{b_n\}$ は等差数列であるから、公差を r とおくと、

$$b_3 = b_1 + (3-1)r$$

$$\Leftrightarrow 3 = 1 + 2r$$

$$\Leftrightarrow r = 1$$

と求まる。よって、

$$b_n = b_1 + (n-1)r$$

$$= 1 + (n-1) \cdot 1$$

$$= n$$

となる。したがって、

$$b_n = \log_2(a_n + 1)$$

$$\Leftrightarrow n = \log_2(a_n + 1)$$

$$\Leftrightarrow a_n + 1 = 2^n$$

$$\Leftrightarrow a_n = 2^n - 1$$

となる。

(答) $a_n = 2^n - 1$

(2)

与えられた不等式の左辺は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_{k+1} - a_k} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2^{k+1} - 1) - (2^k - 1)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k (2 - 1)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$0 < \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

より、

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1 - 0 = 1$$

であるから、すべての自然数 n に対し、

$$\frac{1}{a_2 - a_1} + \frac{1}{a_3 - a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{n+1} - a_n} < 1$$

は成り立つ。

(証明終)

