

(1)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n^2} \left\{ \cos \frac{\pi}{2n} + 2 \cos \frac{2\pi}{2n} + 3 \cos \frac{3\pi}{2n} + \cdots + (n-1) \cos \frac{(n-1)\pi}{2n} \right\} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \cos \frac{k\pi}{2n} - \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \cos \frac{n\pi}{2n} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \cos \frac{\pi}{2} \cdot \frac{k}{n} - \frac{1}{n} \cos \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \cos \frac{\pi}{2} \cdot \frac{k}{n} - 0 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cos \frac{\pi}{2} \cdot \frac{k}{n} \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、区分別積分法を用いると、

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left\{ \cos \frac{\pi}{2n} + 2 \cos \frac{2\pi}{2n} + 3 \cos \frac{3\pi}{2n} + \cdots + (n-1) \cos \frac{(n-1)\pi}{2n} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cos \frac{\pi}{2} \cdot \frac{k}{n} \\ &= \int_0^1 x \cos \frac{\pi}{2} x dx \\ &= \int_0^1 x \left(\frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} x \right)' dx \\ &= \left[x \cdot \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} x dx \\ &= \frac{2}{\pi} - \int_0^1 \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} x dx \\ &= \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \left[\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} x \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi^2} (0-1) \\ &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}$

(2)(i)

$$\begin{aligned} f(x) &= \log |x^2 - 2x - 1| \text{ であるから,} \\ f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow |x^2 - 2x - 1| &= 1 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 &= \pm 1 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 &= 0, x(x-2) = 0 \\ \Leftrightarrow x &= 1 \pm \sqrt{3}, 0, 2 \end{aligned}$$

である。

(答) $x = 1 \pm \sqrt{3}, 0, 2$

(ii)

$$x^2 - 2x - 1 = \{x - (1 - \sqrt{2})\} \{x - (1 + \sqrt{2})\}$$

と変形できることから、 $x^2 - 2x - 1$ は、 $x < 1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2} < x$ のときは正、 $1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$ のときは負、 $x = 1 \pm \sqrt{2}$ のときは 0 となる。ここで、真数条件より $|x^2 - 2x - 1| > 0$ であるため、

$x \neq 1 \pm \sqrt{2}$ である。以下、 x の範囲によって場合分けを行う。

[1] $x < 1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2} < x$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= \log(x^2 - 2x - 1) \\ f'(x) &= \frac{2(x-1)}{x^2 - 2x - 1} \end{aligned}$$

である。 $f'(x)$ について、 $x^2 - 2x - 1 > 0$ であるから、 $x < 1 - \sqrt{2}$ のとき $f'(x) < 0$ 、 $1 + \sqrt{2} < x$ のとき $f'(x) > 0$ となる。

[2] $1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$ のとき

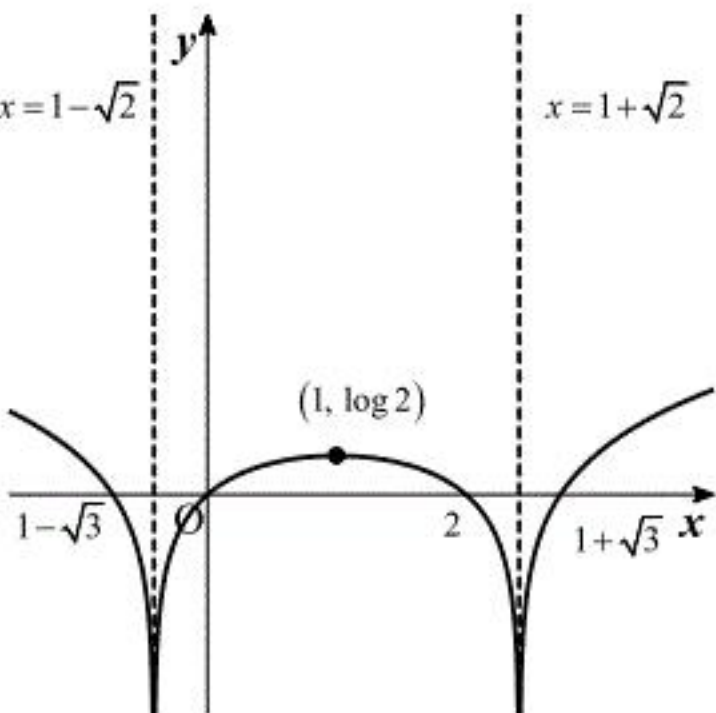
$$\begin{aligned} f(x) &= \log \{-(x^2 - 2x - 1)\} \\ f'(x) &= \frac{-(2x-2)}{-(x^2 - 2x - 1)} = \frac{2(x-1)}{x^2 - 2x - 1} \end{aligned}$$

である。 $x^2 - 2x - 1 < 0$ であり、[1]と同様に考えると、 $x < 1$ のとき $f'(x) > 0$ 、 $x = 1$ のとき $f'(x) = 0$ 、 $x > 1$ のとき $f'(x) < 0$ である。

以上[1], [2]より、以下の増減表を得る。

x	$\cdots$	$1 - \sqrt{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$1 + \sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$+$	0	$-$		$+$
$f(x)$				$\log 2$			

また、グラフは以下のようになり、漸近線は $x = 1 \pm \sqrt{2}$ である。

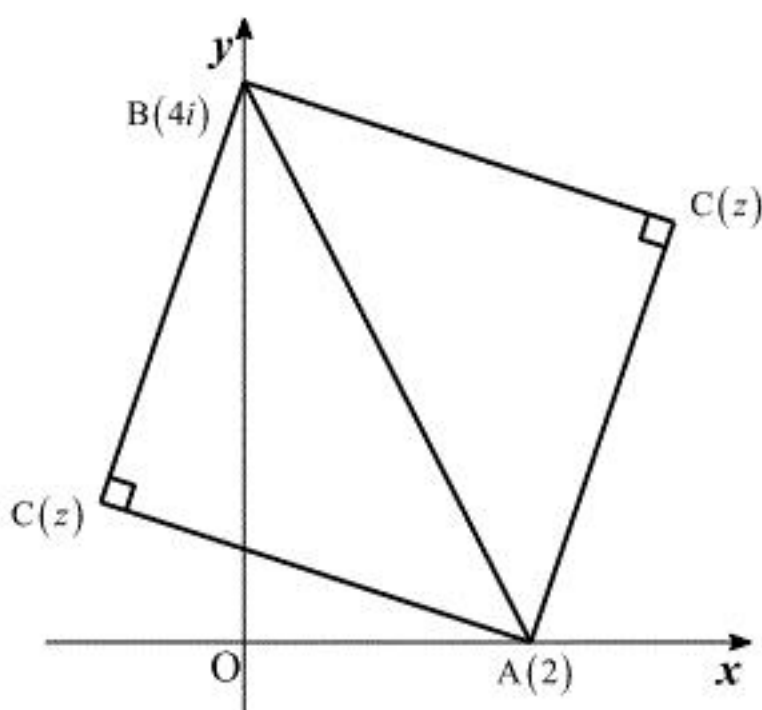


増減	上表
極大値	$\log 2 \ (x = 1)$

(答) x 軸との交点 $(1 \pm \sqrt{3}, 0), (0, 0), (2, 0)$

漸近線	$x = 1 \pm \sqrt{2}$
概形	上図

(1)



$\triangle ABC$ は $AC = BC$ なる直角二等辺三角形であるから、上図のように、 $\overrightarrow{BC}$ は $\overrightarrow{BA}$ を $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍に

縮小し、 $\pm \frac{\pi}{4}$ 回転させたものである。これを複素数で表すと、

$$\begin{aligned} z - 4i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \cos\left(\pm \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\pm \frac{\pi}{4}\right) \right\} (2 - 4i) \\ \Leftrightarrow z - 4i &= \frac{1}{2} (1 \pm i) (2 - 4i) \end{aligned}$$

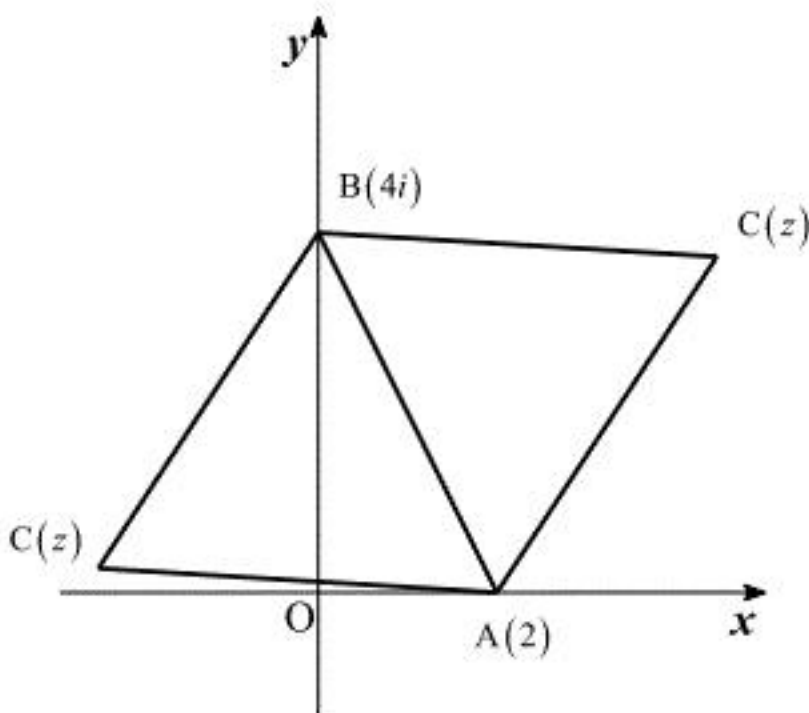
となる。これより、

$$\begin{aligned} z - 4i &= \frac{1}{2} (1 + i) (2 - 4i) = 3 - i \Leftrightarrow z = 3 + 3i \\ z - 4i &= \frac{1}{2} (1 - i) (2 - 4i) = -1 - 3i \Leftrightarrow z = -1 + i \end{aligned}$$

となる。

(答) $z = 3 + 3i, -1 + i$

(2)



$\triangle ABC$ は正三角形であるから、上図のように、 $\overrightarrow{BC}$ は $\overrightarrow{BA}$ を $\pm \frac{\pi}{3}$ 回転させたものである。これを複素数で表すと、

$$\begin{aligned} z - 4i &= \left\{ \cos\left(\pm \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pm \frac{\pi}{3}\right) \right\} (2 - 4i) \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} (2 - 4i) \end{aligned}$$

となる。これより、

$$\begin{aligned} z - 4i &= \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} (2 - 4i) = (1 + 2\sqrt{3}) + (\sqrt{3} - 2)i \Leftrightarrow z = 1 + 2\sqrt{3} + (2 + \sqrt{3})i \\ z - 4i &= \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} (2 - 4i) = (1 - 2\sqrt{3}) - (2 + \sqrt{3})i \Leftrightarrow z = 1 - 2\sqrt{3} + (2 - \sqrt{3})i \end{aligned}$$

となる。

(答) $z = 1 + 2\sqrt{3} + (2 + \sqrt{3})i, 1 - 2\sqrt{3} + (2 - \sqrt{3})i$

(1)

$x > 0$ であるから、

$$x \log x \geq x - 1 \Leftrightarrow \log x \geq 1 - \frac{1}{x}$$

となる。よって、 $g(x) = \log x - 1 + \frac{1}{x}$ としたとき、 $g(x) \geq 0$ が成り立つことを示せばよい。

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$$

であるから、増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

増減表より、 $g(x) \geq 0$ であるから、不等式は示された。また、等号成立は $x=1$ のときである。

(答) 等号成立は $x=1$ のとき

(2)(i)

正の実数 c に対し、 $y = c^x$ とおくと、 $c > 0$ であることから $\log y = x \log c$ と変形でき、両辺を x で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \log y &= \log c \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d}{dy} \log y &= \log c \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} &= \log c \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} &= y \log c \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} &= c^x \log c \end{aligned}$$

となる。よって、 $a > 0, b > 0$ であることから、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \log \frac{a^x + b^x}{2} &= \frac{\left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)'}{\frac{a^x + b^x}{2}} \\ &= \frac{\frac{a^x \log a + b^x \log b}{2}}{\frac{a^x + b^x}{2}} \\ &= \frac{a^x \log a + b^x \log b}{a^x + b^x} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $f(x) = \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$ の両辺に自然対数をとると、

$$\log f(x) = \frac{1}{x} \log \frac{a^x + b^x}{2}$$

となり、両辺を x で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \log f(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \log \frac{a^x + b^x}{2} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{d}{df(x)} \log f(x) &= \left(-\frac{1}{x^2} \right) \cdot \log \frac{a^x + b^x}{2} + \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{d}{dx} \log \frac{a^x + b^x}{2} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{1}{x^2} \left(\frac{a^x \log a + b^x \log b}{a^x + b^x} \cdot x - \log \frac{a^x + b^x}{2} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{1}{x^2} \left(\frac{a^x x}{a^x + b^x} \log a + \frac{b^x x}{a^x + b^x} \log b - \log \frac{a^x + b^x}{2} \right) \end{aligned}$$

となる。一方、

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2x^2} \{ A(x) \log A(x) + B(x) \log B(x) \} \\ &= \frac{1}{2x^2} \left(\frac{2a^x}{a^x + b^x} \log \frac{2a^x}{a^x + b^x} + \frac{2b^x}{a^x + b^x} \log \frac{2b^x}{a^x + b^x} \right) \\ &= \frac{1}{x^2} \left(\frac{a^x}{a^x + b^x} \log \frac{2a^x}{a^x + b^x} + \frac{b^x}{a^x + b^x} \log \frac{2b^x}{a^x + b^x} \right) \\ &= \frac{1}{x^2} \left[\frac{a^x}{a^x + b^x} \{ \log 2 + \log a^x - \log(a^x + b^x) \} + \frac{b^x}{a^x + b^x} \{ \log 2 + \log b^x - \log(a^x + b^x) \} \right] \\ &= \frac{1}{x^2} \left\{ \log 2 + \frac{a^x}{a^x + b^x} \log a^x + \frac{b^x}{a^x + b^x} \log b^x - \log(a^x + b^x) \right\} \\ &= \frac{1}{x^2} \left(\frac{a^x x}{a^x + b^x} \log a + \frac{b^x x}{a^x + b^x} \log b - \log \frac{a^x + b^x}{2} \right) \end{aligned}$$

と変形できるため、

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2x^2} \{ A(x) \log A(x) + B(x) \log B(x) \}$$

となる。

(証明終)

(ii)

$a > b > 0$ より、

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{2a^x}{a^x + b^x} = 1 + \frac{a^x - b^x}{a^x + b^x} \\ \therefore A(x) &> 1 \\ B(x) &= \frac{2b^x}{a^x + b^x} = 1 - \frac{a^x - b^x}{a^x + b^x} \\ \therefore 0 &< B(x) < 1 \end{aligned}$$

となる。よって、(1)より、

$$\begin{aligned} A(x) \log A(x) &> A(x) - 1 \\ B(x) \log B(x) &> B(x) - 1 \end{aligned}$$

である。また、(2)(i)より、

$$\begin{aligned} &\frac{f'(x)}{f(x)} \\ &= \frac{1}{2x^2} \{ A(x) \log A(x) + B(x) \log B(x) \} \\ &> \frac{1}{2x^2} \{ A(x) + B(x) - 2 \} \\ &= \frac{1}{x^2} \left(\frac{2a^x}{a^x + b^x} + \frac{2b^x}{a^x + b^x} - 2 \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるから、

$$\frac{f'(x)}{f(x)} > 0$$

である。また、 $a > b > 0$ から、 $f(x) > 0$ であり、 $f'(x) > 0$ となる。したがって、 $f(x)$ は $x > 0$ で増加する。

(証明終)

(iii)

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} \\ &= (a^x)^{\frac{1}{x}} \left(\frac{a^x + b^x}{2a^x} \right)^{\frac{1}{x}} \\ &= a \left[\frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{b}{a} \right)^x \right\} \right]^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

と変形できる。 $a > b > 0$ より、 $0 < \frac{b}{a} < 1$ であるから、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{b}{a} \right)^x = 0$$

となり、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{b}{a} \right)^x \right\} = \frac{1}{2}$ と有限確定する。よって、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{b}{a} \right)^x \right\} \right]^{\frac{1}{x}} = 1$$

と求まるため、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} a \left[\frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{b}{a} \right)^x \right\} \right]^{\frac{1}{x}} = a$$

となる。

(証明終)