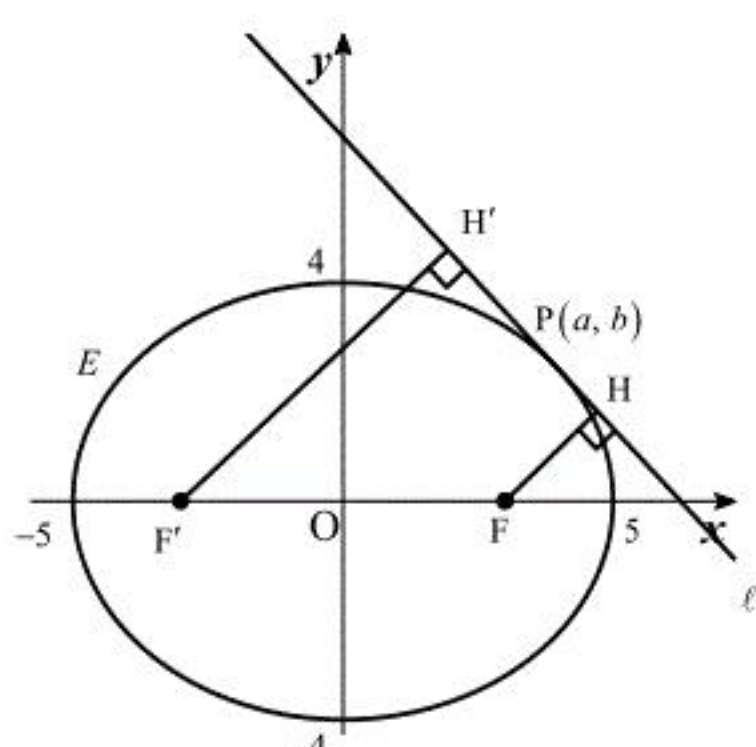


(1)



焦点の座標は、 $F(\sqrt{25-16}, 0)=F(3, 0)$ 、 $F'(-\sqrt{25-16}, 0)=F'(-3, 0)$ であり、点 $P(a, b)$ におけ

る E の接線の方程式は、

$$\frac{a}{25}x + \frac{b}{16}y = 1$$

となる。直線 FH 、直線 $F'H'$ は直線 ℓ と直交するため、線分 FH 、線分 $F'H'$ の長さはそれぞれ点 F 、点 F' と接線 ℓ との距離であるから、

$$\begin{aligned} FH &= \frac{\left| \frac{a}{25} \cdot 3 + \frac{b}{16} \cdot 0 - 1 \right|}{\sqrt{\left(\frac{a}{25} \right)^2 + \left(\frac{b}{16} \right)^2}} = \frac{\left| \frac{3}{25}a - 1 \right|}{\sqrt{\left(\frac{a}{25} \right)^2 + \left(\frac{b}{16} \right)^2}} \\ F'H' &= \frac{\left| \frac{a}{25} \cdot (-3) + \frac{b}{16} \cdot 0 - 1 \right|}{\sqrt{\left(\frac{a}{25} \right)^2 + \left(\frac{b}{16} \right)^2}} = \frac{\left| -\frac{3}{25}a - 1 \right|}{\sqrt{\left(\frac{a}{25} \right)^2 + \left(\frac{b}{16} \right)^2}} \end{aligned}$$

である。 $b \neq 0$ であるため、図より、 $|a| < 5$ であるから、

$$\frac{3}{25}a - 1 < \frac{3}{25} \cdot 5 - 1 = -\frac{2}{5} < 0, \quad -\frac{3}{25}a - 1 < -\frac{3}{25} \cdot (-5) - 1 = -\frac{2}{5} < 0$$

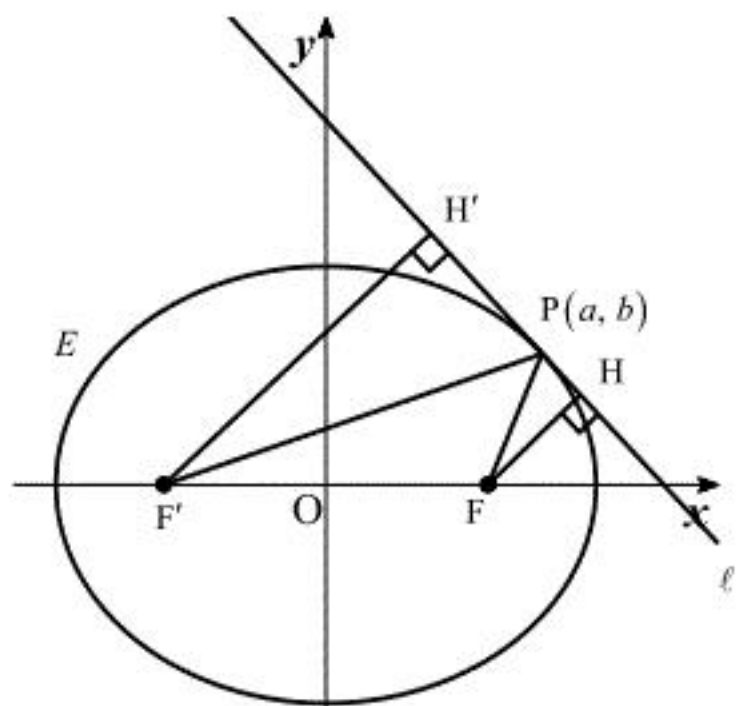
となる。したがって、

$$\begin{aligned} FH &= \frac{\left| \frac{3}{25}a - 1 \right|}{\sqrt{\left(\frac{a}{25} \right)^2 + \left(\frac{b}{16} \right)^2}} = \frac{1 - \frac{3}{25}a}{\sqrt{\left(\frac{a}{25} \right)^2 + \left(\frac{b}{16} \right)^2}} \\ F'H' &= \frac{\left| -\frac{3}{25}a - 1 \right|}{\sqrt{\left(\frac{a}{25} \right)^2 + \left(\frac{b}{16} \right)^2}} = \frac{1 + \frac{3}{25}a}{\sqrt{\left(\frac{a}{25} \right)^2 + \left(\frac{b}{16} \right)^2}} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad FH = \frac{1 - \frac{3}{25}a}{\sqrt{\left(\frac{a}{25} \right)^2 + \left(\frac{b}{16} \right)^2}}, \quad F'H' = \frac{1 + \frac{3}{25}a}{\sqrt{\left(\frac{a}{25} \right)^2 + \left(\frac{b}{16} \right)^2}}$$

(2)



点 $P(a, b)$ は楕円 E 上の点であるから、

$$\frac{a^2}{25} + \frac{b^2}{16} = 1$$

を満たす。これを用いると、点 $F(3, 0)$ より、線分 PF の長さは

$$\begin{aligned} PF &= \sqrt{(a-3)^2 + b^2} \\ &= \sqrt{(a-3)^2 + 16 \left(1 - \frac{a^2}{25} \right)} \\ &= \sqrt{a^2 - 6a + 9 + 16 - \frac{16}{25}a^2} \\ &= \sqrt{\frac{9}{25}a^2 - 6a + 25} \\ &= \sqrt{\left(\frac{3}{5}a - 5 \right)^2} \\ &= \left| \frac{3}{5}a - 5 \right| \\ &= 5 \left| \frac{3}{25}a - 1 \right| \\ &= 5 \left(1 - \frac{3}{25}a \right) \end{aligned}$$

と求まる。(1)より、 $FH = \frac{1 - \frac{3}{25}a}{\sqrt{\left(\frac{a}{25} \right)^2 + \left(\frac{b}{16} \right)^2}}$ であるから、

$$PF: FH = 5 \left(1 - \frac{3}{25}a \right) : \frac{1 - \frac{3}{25}a}{\sqrt{\left(\frac{a}{25} \right)^2 + \left(\frac{b}{16} \right)^2}} = 5 : \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{25} \right)^2 + \left(\frac{b}{16} \right)^2}}$$

である。同様にして、

$$PF': F'H' = 5 \left(1 + \frac{3}{25}a \right) : \frac{1 + \frac{3}{25}a}{\sqrt{\left(\frac{a}{25} \right)^2 + \left(\frac{b}{16} \right)^2}} = 5 : \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{25} \right)^2 + \left(\frac{b}{16} \right)^2}}$$

である。ゆえに、

$$PF: FH = PF': F'H'$$

となる。以上のことから、 $\triangle PFH$ と $\triangle PF'H'$ は、直角三角形であり、斜辺と他の一辺の長さの比が等しいため、 $\triangle PFH \sim \triangle PF'H'$ が示された。

(証明終)

(1)

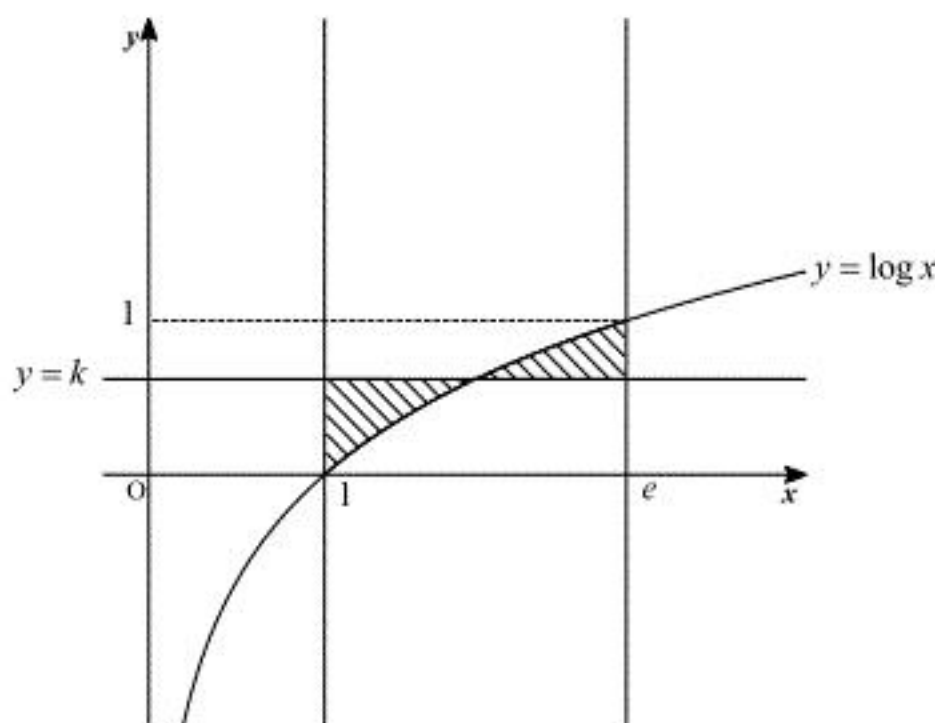
$(y-k)(y-\log x) \leq 0$ は,

$(y-k \leq 0 \text{ かつ } y-\log x \geq 0)$ または $(y-k \geq 0 \text{ かつ } y-\log x \leq 0)$

すなわち,

$\log x \leq y \leq k$ または $k \leq y \leq \log x$

であることが必要十分である。 $0 < k < 1$ であるから、 $1 \leq x \leq e$ の範囲でこれを図示すると、以下ようになる。



(答) 上図の斜線部、ただし境界を含む

(2)

$y = \log x$ と $y = k$ の交点の x 座標を a とおくと、 $k = \log a$ となる。いま、(1)の領域を x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積を V とおくと、

$$\begin{aligned} V &= \pi k^2 (a-1) - \pi \int_1^a (\log x)^2 dx + \pi \int_a^e (\log x)^2 dx - \pi k^2 (e-a) \\ &= \pi (\log a)^2 (2a-1-e) - \pi \int_1^a (\log x)^2 dx + \pi \int_a^e (\log x)^2 dx \end{aligned}$$

である。ここで、 V を a で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{dV}{da} &= \pi \cdot \frac{1}{a} \cdot 2 \log a (2a-e-1) + \pi \cdot (\log a)^2 \cdot 2 - \pi (\log a)^2 - \pi (\log a)^2 \\ &= \frac{2\pi \log a}{a} (2a-e-1) \end{aligned}$$

となる。 $1 < a < e$ の範囲では、 $\frac{2\pi \log a}{a} > 0$ であるため、 $\frac{dV}{da}$ の符号は $(2a-e-1)$ の符号に一致

する。よって、 $1 \leq a \leq e$ の範囲での増減表は以下ようになる。

a	1	...	$\frac{1+e}{2}$	...	e
$\frac{dV}{da}$		-	0	+	
V		↘	極小	↗	

増減表より、体積が最小となるのは $k = \log \frac{1+e}{2}$ のときである。

(答) $\log \frac{1+e}{2}$

(1)

事象 A を 2 が書かれた玉が少なくとも 2 回出る事象, 事象 B を 3 が書かれた玉が少なくとも 1 回出る事象とする。12 = $2^2 \cdot 3$ であるから, Y が 12 の倍数となる確率は $P(A \cap B)$ で表される。

いま, $P(\overline{A})$ を考えると, $\overline{A}$ は 2 が書かれた玉が 0, 1 回出ることであり, 2 が書かれた玉が 1

回も出ない場合の数は, 毎回 1, 3 が書かれた玉が出ることを考えて,

$$2^4 \text{ 通り}$$

である。2 が書かれた玉が 1 回しか出ない場合の数は, 何回目の試行で 2 が書かれた玉が出るかで 4 通り, その他の試行で出る玉は 1, 3 が書かれた玉であるから,

$$4 \cdot 2^3 \text{ 通り}$$

である。玉の出方の総数は 3^4 通りであり, これらは同様に確からしいため,

$$\begin{aligned} P(\overline{A}) &= \frac{2^4 + 4 \cdot 2^3}{3^4} \\ &= \frac{2^4(1+2)}{3^4} \\ &= \frac{2^4}{3^3} \end{aligned}$$

である。次に, $P(\overline{B})$ を考える。 $\overline{B}$ は, 3 が書かれた玉が 1 回も出ないこと, すなわち毎回 1, 2

が書かれた玉が出ることであるから, このようになる場合の数は,

$$2^4 \text{ 通り}$$

である。ゆえに,

$$P(\overline{B}) = \frac{2^4}{3^4}$$

である。次に, $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ を考える。 $\overline{A} \cap \overline{B}$ は, 2 が書かれた玉が 0, 1 回, 3 が書かれた玉が 0 回

出ることである。2 が書かれた玉が 0 回, 3 が書かれた玉が 0 回出る場合の数は, 毎回 1 が書かれた玉が出ることを考えて,

$$1 \text{ 通り}$$

である。2 が書かれた玉が 1 回, 3 が書かれた玉が 0 回出る場合の数は, 何回目の試行で 2 が書かれた玉が出るかで 4 通り, その他の試行では 1 が書かれた玉が出るため,

$$4 \text{ 通り}$$

である。よって,

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1+4}{3^4} = \frac{5}{3^4}$$

となる。ゆえに, ド・モルガンの法則を用いると,

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= 1 - P(\overline{A \cap B}) \\ &= 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B}) \\ &= 1 - \{P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B})\} \\ &= 1 - \left(\frac{2^4}{3^3} + \frac{2^4}{3^4} - \frac{5}{3^4} \right) \\ &= 1 - \left(\frac{2^4 \cdot 3 + 2^4 - 5}{3^4} \right) \\ &= 1 - \frac{59}{81} \\ &= \frac{22}{81} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{22}{81}$

(2)

まず, Z が 3 の倍数となるのは, $X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ が 3 の倍数となるときであるが, $X_1 + X_2 + X_3$ を 3 で割った余り (0, 1, 2) に応じて X_4 は 1, 2, 3 のいずれか 1 つを選ぶことで, $X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ を 3 の倍数とすることができる。ここで, $X_1 + X_2 + X_3$ を 3 で割った余りが 0 となる確率を p , $X_1 + X_2 + X_3$ を 3 で割った余りが 1 となる確率を q , $X_1 + X_2 + X_3$ を 3 で割った余りが 2 となる確率を r とおく。 X_4 は 1, 2, 3 のいずれかの数字であり, それぞれの数字となる確率は同様に確からしいため, 求める確率は,

$$\frac{1}{3}p + \frac{1}{3}q + \frac{1}{3}r$$

となる。ここで, 整数を 3 で割った余りは 0 か 1 か 2 のみであるから, $p + q + r = 1$ である。よって, 求める確率は

$$\frac{1}{3}p + \frac{1}{3}q + \frac{1}{3}r = \frac{1}{3}(p + q + r) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

となる。次に, Z が 4 の倍数となるのは, 下 2 桁の数 X_3X_4 が 4 の倍数となるときであるが, その組み合わせは,

$$(X_3, X_4) = (1, 2), (3, 2)$$

の 2 通りである。 X_3, X_4 はそれぞれ 1, 2, 3 のいずれかの数字であり, それぞれの数字となる確率は同様に確からしいため, Z が 4 の倍数となる確率は,

$$\frac{2}{3^2} = \frac{2}{9}$$

となる。

(答) Z が 3 の倍数になる確率: $\frac{1}{3}$, Z が 4 の倍数になる確率: $\frac{2}{9}$