

学 力 検 査 問 題

数 学

数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲ
数学A，数学B，数学C

平成10年2月25日

自 9 時 00 分

至 11 時 30 分

答案作成上の注意

- 1 この問題用紙には，新「数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲ，数学A(数と式，数列)，数学B(ベクトル，複素数と複素数平面)，数学C(行列と線形計算，いろいろな曲線)」と旧「数学Ⅰ，代数・幾何，基礎解析，微分・積分，確率・統計」との共通の範囲の問題が6問ある。総ページは3ページである。
- 2 解答用紙は6枚(表面)である。解答はすべて解答用紙の所定の場所に記入すること。
- 3 下書用紙は，各受験者に1枚である。
- 4 受験番号は，すべての解答用紙(2ヶ所)，下書用紙(1ヶ所)の所定の欄に必ず記入すること。
- 5 試験終了後は，解答用紙の左にある番号の順に並べること。
- 6 配布した解答用紙，下書用紙は持ち出してはならない。

〔Ⅰ〕 行列

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -x \\ x & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (x \geq 0)$$

に対して、

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + A^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つとする。

(1) x を求めよ。

(2) A^3 を求めよ。

(3) 自然数 n に対して、 $A^{2n} + A^n + E$ を求めよ。ただし、 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。

〔Ⅱ〕 空間内に4点

$$P_1 \left(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1 \right), \quad P_2 \left(0, -\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1 \right), \\ P_3 \left(1, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right), \quad P_4 \left(-1, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)$$

を定め、線分 P_1P_2 の中点を Q とする。

(1) 内積 $\overrightarrow{P_2P_1} \cdot \overrightarrow{QP_3}$ と $\overrightarrow{P_2P_1} \cdot \overrightarrow{QP_4}$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{QP_3}$ と $\overrightarrow{QP_4}$ のなす角を θ とするとき、 $\sin \theta$ の値を求めよ。

(3) 四面体 $P_1P_2P_3P_4$ の体積を求めよ。

〔Ⅲ〕 閉区間 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 上の関数 $f(x)$ を次の式で定義する。

$$f(x) = \int_x^{x+1} \log \left(\left| t - \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{2} \right) dt$$

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ $\left(-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right)$ を求めよ。

(2) $f(x)$ を最小にする x の値 a と、そのときの最小値を求めよ。

(3) (2)で求めた a に対して、

$$\int_a^{a+1} t \log \left(\left| t - \frac{1}{2} \right| + \frac{1}{2} \right) dt$$

を求めよ。

〔IV〕 曲線 C は媒介変数 θ を用いて

$$C: \begin{cases} x = \cos^2 \theta - \sqrt{3} \sin \theta \cos \theta \\ y = \sin \theta \cos \theta - \sqrt{3} \sin^2 \theta \end{cases} \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{5}{12} \pi \right)$$

と表されている。

(1) 曲線 C が

$$C: \begin{cases} x = a + b \cos(2\theta + A) \\ y = c + d \sin(2\theta + A) \end{cases} \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{5}{12} \pi \right)$$

と表されるような a, b, c, d, A ($0 \leq A < \pi$) を求めよ。

(2) 曲線 C の長さを求めよ。

〔V〕 自然数 n に対して、関数 $f_n(x) = p_n e^{nx} + q_n e^{-nx}$ が $f_n(0) = 1$, $f'_n(1) = -n$ を満たすとする。

(1) p_n と q_n を求め、 $f'_n(x) < 0$ を示せ。

(2) 方程式 $f_n(x) = 0$ の解 z_n を求めよ。

(3) 数列 $\{z_n\}$ に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ を求めよ。

〔VI〕 A と B の2人がジャンケンをする。 A がグー、チョキ、パーを出す確率をそれぞれ x, y, z とし、 B がグー、チョキ、パーを出す確率をそれぞれ p, q, r とする。1回のジャンケンの結果、 A は次の表のような点を得る。

A の得点表

	B がグー	B がチョキ	B がパー
A がグー	0	3	-6
A がチョキ	-3	0	5
A がパー	6	-5	0

このときの A の得点の期待値を E で表す。

(1) $p = q = r = \frac{1}{3}$ のとき、 E を最大にする x, y, z と、そのときの最大値を求めよ。

(2) 「 B が確率 p, q, r をどのようにとっても $E = 0$ 」となるには、 A は確率 x, y, z をどのようにとればよいか。