

学 力 検 査 問 題

数 学

数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲ
数学A，数学B，数学C

平成 11 年 2 月 25 日

自 9 時 00 分

至 11 時 30 分

答案作成上の注意

- 1 この問題用紙には，数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲ，数学A(数と式，数列)，数学B(ベクトル，複素数と複素数平面)，数学C(行列と線形計算，いろいろな曲線)の問題が6問ある。総ページは3ページである。
- 2 解答用紙は6枚(表面)である。解答はすべて解答用紙の所定の場所に記入すること。
- 3 下書用紙は，各受験者に1枚である。
- 4 受験番号は，すべての解答用紙(2ヶ所)，下書用紙(1ヶ所)の所定の欄に必ず記入すること。
- 5 試験終了後は，解答用紙の左にある番号の順に並べること。
- 6 配布した解答用紙，下書用紙は持ち出してはならない。

〔Ⅰ〕 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。

(1) $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、 $AX = XA$ が成り立つとき、 a, b, c, d の満た

す関係式を求めよ。

(2) 2 次の正方行列 B, C が

$$AB = BA = C, \quad BC = CB = A$$

を満たすとき、 B, C を求めよ。

〔Ⅱ〕 $0 < a < 1$ とする。点 $(1, 0)$ から楕円 $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$ に引いた接線の接点の x 座標を b とする。

(1) b を a で表せ。

(2) 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$ の $b \leq x \leq a$ の部分と直線 $x = b$ で囲まれた図形を、 x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を a で表せ。

(3) V の値が最大となる a の値と、そのときの V の最大値を求めよ。

〔Ⅲ〕 $OA = OB$ を満たす二等辺三角形 OAB において、頂点 A, B からそれぞれの対辺またはその延長上に引いた 2 つの垂線の交点を G 、辺 AB の中点を H とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ 、 $\angle AOB = \theta$ とおく。

(1) $\overrightarrow{OG} = s\vec{a} + t\vec{b}$ を満たす s, t を θ を用いて表せ。

(2) 点 G が三角形 OAB の外部または周上にあるときの θ の値の範囲を求めよ。

(3) $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{2}{3}\pi$ のとき、 $\frac{|\overrightarrow{GH}|}{|\overrightarrow{OH}|}$ の値の範囲を求めよ。

〔IV〕 k を定数とする。曲線 $y = x^3 - kx$ 上の点 $P(a, a^3 - ka)$ における接線 l が、曲線上の P と異なる点 $Q(b, b^3 - kb)$ を通るものとする。

- (1) b を a で表せ。
- (2) Q における曲線 $y = x^3 - kx$ の接線が l と直交するとき、 k, a の満たす関係式を求めよ。
- (3) (2) で求めた関係式を満たす a が存在するような k の値の範囲を求めよ。

〔V〕 n が自然数のとき、次の不等式を証明せよ。ただし、 $a > 0$ とする。

- (i) $(a + 1)^n \geq a^n + na^{n-1}$
- (ii) $(n + 1)^n \geq 2n^n$
- (iii) $n! \leq 2 \left(\frac{n}{2} \right)^n$

〔VI〕 1 から n までの自然数を 1 つずつ書いた n 枚のカードがある。よくまぜて 1 枚引いては戻すということを 2 回行い、1 回目に引いたカードに書かれている数と 2 回目に引いたカードに書かれている数の差の絶対値を得点とする試行を考える。

- (1) この試行を 1 回行うときの得点の期待値を n の式で表せ。
- (2) $n = 3$ とする。この試行を 3 回行うとき、得点の合計が 2 である確率を求めよ。