

〔 1 〕 次の問いに答えよ。

(1) 次の不等式を満たす x の範囲を求めよ。

$$\log_3(x - 7) + \log_3(x - 5) \leq 1$$

(2) 次の不等式を満たす y の範囲を求めよ。

$$9^y - 8 \times 3^y - 9 \leq 0$$

(3) x, y がそれぞれ (1), (2) の範囲を動くとき, $\log_2 x + 2^y$ の最大値を求めよ。

〔2〕 放物線 $y = x^2$ と直線 ℓ が2点で交わっている。それらの交点の x 座標を s, t ($s < t$) とするとき、次の問いに答えよ。

(1) 放物線 $y = x^2$ と直線 ℓ で囲まれた部分の面積 S は、 $S = \frac{1}{6}(t - s)^3$ で与えられることを証明せよ。

(2) 直線 ℓ が、点 (t, t^2) における $y = x^2$ の接線と直交しているとき、 s を t で表せ。

(3) (2) のとき、(1) の面積 S の最小値、および最小値を与える t を求めよ。

〔 3 〕 $y = a(\sin \theta + \cos \theta) + \sin 2\theta$ とする。ただし、 a は正の定数である。

(1) $t = \sin \theta + \cos \theta$ において、 y を t の式で表せ。

(2) $t = \sin \theta + \cos \theta$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) y の最大値 M と最小値 m を、それぞれ a を用いて表せ。

[4] 三角形 OAB において、辺 AB, BO をそれぞれ 1:2 に内分する点を M, N とする。また、線分 OM と AN の交点を P とする。

(1) $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とおくとき、 $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{OP}$ をそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。

(2) OM と AN が直交し、 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ のとき、 $\angle AOB$ を求めよ。

(3) (2) のとき、さらに $|\overrightarrow{OP}|$ を求めよ。

〔 5 〕 さいころを投げて出た目の数が k で割り切れるという事象を A_k , 2 個のさいころを同時に投げて出た 2 つの目の数の積が k で割り切れるという事象を B_k , 3 個のさいころを同時に投げて出た 3 つの目の数の積が k で割り切れるという事象を C_k とする。

- (1) 事象 A_2, A_3, A_4 の確率 $P(A_2), P(A_3), P(A_4)$ を, それぞれ求めよ。
- (2) 事象 B_2, B_3, B_4 の確率 $P(B_2), P(B_3), P(B_4)$ を, それぞれ求めよ。
- (3) 事象 C_2, C_3 の確率 $P(C_2), P(C_3)$ を, それぞれ求めよ。