

[1] z は $0^\circ < \arg z < 90^\circ$ を満たす複素数とし、複素数平面上の 3 点 $O(0)$, $A(1)$, $B(z)$ を頂点とする $\triangle OAB$ を考える。また、 $\alpha = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ とおく。

(1) $\alpha^2 - \alpha + 1$ の値を求めよ。

(2) 点 $P(w)$ を、直線 OB に関して点 A と反対側に、 $\triangle POB$ が正三角形になるようにとる。複素数 w を z と α を用いて表せ。

(3) 点 $Q(z + \alpha - \alpha z)$ に対し、 $\triangle ABQ$ は正三角形であることを示せ。

(4) $\arg\left(\frac{z + \alpha - \alpha z}{w - 1}\right)$ を求めよ。ただし、偏角の範囲は、 0° 以上 360° 未満とする。

〔2〕 $a > 0$ とし，極方程式 $r = 2a \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$) で表される曲線を C とする。

- (1) 曲線 C は円の一部であることを示し，その円の中心と半径を求めよ。さらに，曲線 C を図示せよ。
- (2) 曲線 C と x 軸および直線 $x = a$ で囲まれた図形を， x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

〔 3 〕 数列 $\{a_n\}$ は、関係式

$$a_1 = 2, (a_{n+1} - a_n)^2 = 2(a_{n+1} + a_n), a_{n+1} > a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定まっている。

- (1) a_2, a_3, a_4 を計算せよ。
- (2) 一般項 a_n を n の式で表せ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n})$ を求めよ。

〔 4 〕 次のそれぞれの問いに答えよ。

- (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ が $AB = O$ を満たすとき, 行列 A の 4 つの成分の積 $abcd$ は正または 0 であることを示せ。
- (2) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が逆行列を持たず, 3 つの成分が正であるとき, 残りの 1 つの成分も正であることを示せ。
- (3) A, B を 2×2 行列とする。 $AB = O$ かつ $B \neq O$ ならば, A の逆行列 A^{-1} は存在しないことを示せ。

〔 5 〕 関数 $f(x)$ が任意の実数 x に対して

$$f(x) = x^2 - \int_0^x (x-t)f'(t)dt$$

を満たすとき、次の問いに答えよ。

- (1) $f(0)$ の値を求め、さらに $f'(x) = 2x - f(x)$ が成り立つことを示せ。
- (2) $(e^x f(x))' = 2x e^x$ を示せ。
- (3) $f(x)$ を求めよ。

〔6〕 A, B, C の 3 人が優勝決定戦を行う。まず 3 人のうち 2 人が対戦し、その勝者が残りの 1 人と対戦する。これをくり返して、2 回続けて勝ったものを優勝者とする。A と B が対戦したときにそれぞれが勝つ確率は $\frac{1}{2}$ とし、C が A または B と対戦したときに C が勝つ確率は p ($0 < p < 1$)、負ける確率は $1 - p$ であるとする。

第 1 回戦は A と B の対戦として次の問いに答えよ。

- (1) 第 2 回戦では第 1 回戦の勝者が残りの C と対戦する。C が負ければ勝者は優勝者となるが、C が勝てば C は第 1 回戦の敗者と第 3 回戦を行う。第 3 回戦で優勝者が決まる場合の各対戦の勝者を順に並べると、ACC と BCC の 2 通りの順列が得られる。第 4 回戦で優勝者が決まる場合の各対戦の勝者の順列を答えよ。
- (2) 第 m 回戦で優勝者が決まる確率を F_m とする。 F_2, F_3, F_4 をそれぞれ求めよ。
- (3) 2 以上の自然数 n に対して、確率 F_{3n} を求めよ。
- (4) $\sum_{n=1}^{\infty} F_{3n}$ を計算せよ。