

〔1〕 正の定数 a に対し、 $\log_a(3x) + \log_{\sqrt{a}}(a-x) = 1$ を満たす実数 x がちょうど 2 つある。このとき、 a はどのような範囲にあるか。

〔2〕 直線 $x + y = 1$ 上の点 Q と、放物線 $y = x^2$ 上の原点 O とは異なる点 R に対し、2つの半直線 OQ , OR の x 軸の正の向きからはかった角をそれぞれ α , β とおく。さらに、線分 QR の中点を P とおく。2点 Q , R が $\alpha = \beta + 45^\circ$, $0^\circ < \beta < 45^\circ$ を満たすように動くとき、次の問いに答えよ。

- (1) 直線 OQ の傾きを a , 直線 OR の傾きを b とするとき、 $a = \frac{1+b}{1-b}$ となることを示せ。
- (2) 点 P の座標を b を用いて表せ。
- (3) 点 P の軌跡を求めよ。

[3] 放物線 $y = x^2$ 上の 2 点 $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$ ($a < b$) における接線をそれぞれ l_A , l_B とする。

(1) l_A と l_B の交点を $P(p, q)$ とするとき, a, b は 2 次方程式 $x^2 - 2px + q = 0$ の解であることを示せ。

(2) 2 直線 l_A , $x = b$ と放物線 $y = x^2$ とで囲まれた図形の面積 S は $\frac{1}{3}(b-a)^3$ であることを示せ。

(3) 交点 P が放物線 $y = -(x-1)^2$ 上を動くとき, 面積 S の最小値を求めよ。

〔 4 〕 1 個のさいころを投げるという試行をくり返す。奇数の目が出たら A の勝ち、偶数の目が出たら B の勝ちとし、どちらかが 4 連勝したら試行を終了する。

- (1) この試行が 4 回で終了する確率を求めよ。
- (2) この試行が 7 回以下で終了する確率を求めよ。
- (3) この試行が 5 回以上続き、かつ、4 回目が A の勝ちである確率を求めよ。
- (4) この試行がちょうど 8 回で終了する確率を求めよ。

〔5〕 三角形 ABC において,

$$|\overrightarrow{AB}| = c, |\overrightarrow{BC}| = a, |\overrightarrow{CA}| = b, \quad \vec{p} = \frac{\overrightarrow{AB}}{c}, \quad \vec{q} = \frac{\overrightarrow{BC}}{a}, \quad \vec{r} = \frac{\overrightarrow{CA}}{b}$$

とおき, $b < c$, $\angle B < \angle C$ とする。

(1) $|\vec{r} - \vec{q}| < |\vec{q} - \vec{p}|$ であることを示せ。

(2) 定数 s, t に対して, 辺 AB 上の点 D, 辺 AC 上の点 E があって,

$$\overrightarrow{BE} = s(\vec{q} - \vec{p}), \quad \overrightarrow{CD} = t(\vec{r} - \vec{q})$$

となっている。このとき, s, t を a, b, c の式で表し, さらに

$|t(\vec{r} - \vec{q})| < |s(\vec{q} - \vec{p})|$ であることを示せ。