

[1] 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}$ は次の 3 つの条件 (i), (ii),

(iii) を満たすとする。ただし, $a \neq 0$, $c \neq 0$, $b > d$ で, O は 2 次の零行列である。

$$(i) A^2 = A, \quad (ii) B^2 = B, \quad (iii) AB = O$$

(1) a, b, c, d の値を求めよ。

(2) 実数 p, q がどちらも 0 でないとき, $(pA + qB)(xA + yB) = 2E$ となる実数 x, y を p, q を用いて表せ。ただし, E は 2 次の単位行列である。

[2] 条件 $a_1 = -30$, $9a_{n+1} = a_n + \frac{4}{3^n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定義される数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) $b_n = 3^n a_n$ とおくと、数列 $\{b_n\}$ の漸化式を求めよ。

(2) 一般項 a_n を求めよ。

(3) a_n を最大にする n の値を求めよ。

[3] C_1 を曲線 $y = e^x$, C_2 を曲線 $y = x \log x (x > 0)$ とする。ただし, $\log$ は自然対数を表す。また, $x = e$ で定義される直線を l_1 , l_1 と C_2 との交点 P を通り x 軸に平行な直線を l_2 , l_2 と C_1 との交点 Q を通り y 軸に平行な直線を l_3 とする。

- (1) 2 点 P , Q の座標を求めよ。
- (2) $x \geq 1$ のとき, $e^x > x \log x$ であることを示せ。
- (3) 2 直線 l_1 , l_3 と 2 曲線 C_1 , C_2 によって囲まれた図形の面積を求めよ。

〔4〕 xy 平面上を移動する点 P を考える。はじめに、点 P は原点にあるとする。

4 枚のカードに上、下、左、右の 4 つの文字を 1 つずつ書いて、それらを袋に入れておく。

1 枚のカードを取り出し、

カードに書かれた文字の方向に 1 だけ点 P を移動させて、

取り出したカードを袋に戻す、

という試行をくり返す。上、下、左、右と書かれたカードは、それぞれ同じ確からしさで取り出されるものとする。

- (1) 上、上、下、左、右、右、右の 7 文字すべてを 1 列に並べてできる文字列は何通りあるか。
- (2) この試行を 7 回くり返したときに、点 P が座標 $(2, 1)$ にある確率を求めよ。
- (3) この試行を 5 回くり返したときに、点 P が x 軸上にある確率を求めよ。
- (4) この試行を 2 回くり返したときの点 P の座標を (X, Y) とする。 $|X - Y|$ の期待値を求めよ。

[5] C を曲線 $a^2x^2 + y^2 = 1$, l を直線 $y = ax + 2a$ とする。ただし, a は正の定数である。

- (1) C と l とが異なる 2 点で交わるための a の範囲を求めよ。
- (2) C 上の点 (x_0, y_0) における接線の方程式を求めよ。
- (3) (1) における交点を P, Q とし, 点 P における C の接線と点 Q における C の接線との交点を $R(X, Y)$ とする。 a が (1) の範囲を動くとき, X, Y の関係式と Y の範囲を求めよ。

[6] l を複素数平面上の直線 $z = t(1 + i)$ (t は実数), α, β を複素数とする。ただし, 点 α は l 上にないとする。

(1) $\alpha = i\beta$ または $\alpha = \bar{\beta}$ ならば, l 上のすべての点 z に対して $\left| \frac{\bar{z} - \beta}{z - \alpha} \right| = 1$ であることを示せ。

(2) l 上のすべての点 z に対して $\left| \frac{\bar{z} - \beta}{z - \alpha} \right| = 1$ ならば, $\alpha = i\beta$ または $\alpha = \bar{\beta}$ であることを示せ。

(3) l 上の異なる 2 定点 z_1, z_2 があって $\frac{\bar{z}_1 - \beta}{z_1 - \alpha}$ と $\frac{\bar{z}_2 - \beta}{z_2 - \alpha}$ は同じ複素数になるとする。この複素数を γ とおくと, l 上のすべての点 z に対し $\frac{\bar{z} - \beta}{z - \alpha} = \gamma$ となることを示せ。また γ の値を求めよ。