

〔 1 〕 2 次関数 $y = 3ax^2 - 2(b+1)x + b+1$ のグラフ F について、次の問いに答えよ。

- (1) a, b をともに 1 から 6 までの整数とすると、 F と x 軸との共有点の個数がただ 1 つであるような定数 a, b の値の組をすべて求めよ。
- (2) さいころを続けて 2 回投げ、定数 a, b の値を 1 回目に出た目の数を a 、2 回目に出た目の数を b と決める。このとき、 F と x 軸との共有点の個数の期待値 E を求めよ。

- 〔2〕 三角形 ABC において、辺 BC を 2 : 1 の比に内分する点を M とする。辺 AB, AC をそれぞれ B, C の側に延長した半直線を l, m とし、M を通る直線 k と l, m との交点をそれぞれ P, Q とする。

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}, \overrightarrow{AP} = p\vec{b}, \overrightarrow{AQ} = q\vec{c},$$

とおくとき、次の問いに答えよ。ただし、 p, q は正の実数とする。

- (1) $\overrightarrow{AM}$ を $\vec{b}, \vec{c}$ で表せ。
- (2) $\frac{1}{p} + \frac{2}{q} = 3$ が成り立つことを示せ。
- (3) Q から直線 AB に下ろした垂線と直線 AB との交点を H とするとき、 $\overrightarrow{QH}$ を $\vec{b}, \vec{c}, q$ で表せ。
- (4) M を通る直線 k が半直線 l, m と点 A 以外でそれぞれ交わるように変わる
とき、三角形 APQ の面積を最小にする p, q の値を求めよ。

〔 3 〕 次の問いに答えよ。

- (1) a, b, c, d を正の整数とする。 $(a + b\sqrt{2})^2 = (c + d\sqrt{2})^2$ ならば、 $a = c$,
 $b = d$ であることを示せ。ただし、 $\sqrt{2}$ が無理数であることを用いてよい。
- (2) 次の2つの数 r, s はそれぞれ、 a, b を正の整数として、 $(a + b\sqrt{2})^2$ と表
すことができるか。表すことができれば、 a, b の値を求めよ。表すことがで
きなければ、その理由を示せ。

$$r = 967 + 384\sqrt{2}, s = 2107 + 1470\sqrt{2}$$

〔 4 〕 次の問いに答えよ。

(1) a を 0 でない実数とすると、2 つの曲線 $y = -x^2 + 2x$ と $y = -ax^2 + 1$ が $0 \leq x \leq 2$ の範囲で 2 つの交点をもつように a の範囲を定めよ。

(2) a_0 を (1) で求めた a の範囲の最大値とすると、定積分

$$I = \int_0^2 |(-a_0x^2 + 1) - (-x^2 + 2x)| dx$$

を求めよ。

〔 5 〕 不等式

$$\log_a b + \log_a (k - b) > 2$$

を満たす実数 a, b について、次の問いに答えよ。ただし、 k は $k > 2$ を満たす定数とする。

- (1) 点 (a, b) 全体の集合を ab 平面上に図示せよ。
- (2) $a + b$ がとる値の範囲を求めよ。