

[1]

$$2^x = t \text{ とすると, } t^2 + 2at + b = 0 \quad (t > 0) \quad \cdots \textcircled{1}$$

(1) $a = -1, b = -3$ のとき,

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \quad (t+1)(t-3) = 0$$

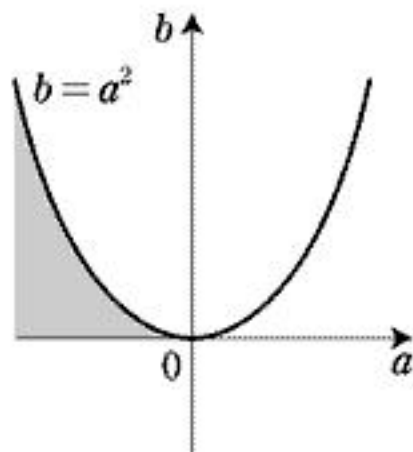
$$t > 0 \text{ より, } 2^x = t = 3 \quad \therefore x = \log_2 3 \quad \cdots (\text{答})$$

(2) ①が異なる2つの正の実数解をもてばよいが,

$f(t) = t^2 + 2at + b$ とすると, その条件は,

$$\begin{cases} \text{判別式: } \frac{D}{4} = a^2 - b > 0 \\ \text{軸: } -a > 0 \\ y \text{ 切片: } f(0) = b > 0 \end{cases}$$

よって, $b < a^2$ かつ $a < 0$ かつ $b > 0$ となり, これを図示すると右図の塗部となり, 境界は含まない。



[2]

(1) $2 \sin(x + 60^\circ) + c = 0$ より,

$$\sin(x + 60^\circ) = -\frac{c}{2} \quad \cdots (\text{答}) \quad \cdots \textcircled{1}$$

また, $c = \sqrt{3}$ のとき, $-120^\circ < x + 60^\circ < 240^\circ$ より,

$$x + 60^\circ = -60^\circ \quad \therefore x = -120^\circ \quad \cdots (\text{答})$$

(2) (*) つまり①が $-120^\circ < x + 60^\circ < 240^\circ$ で異なる 2 つの解をもつための条件は,

$$-1 < -\frac{c}{2} < 1 \text{ かつ } -\frac{c}{2} \neq -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{よって, } -2 < c < \sqrt{3}, \quad \sqrt{3} < c < 2 \quad \cdots (\text{答})$$

$$(3) \quad \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{1 + t^2} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \sin x &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} \\ &= \frac{2t}{1 + t^2} \end{aligned}$$

$$\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad (\text{証明終})$$

よって, (*) は

$$2t + \sqrt{3}(1 - t^2) + c(1 + t^2) = 0$$

$$\therefore (c - \sqrt{3})t^2 + 2t + c + \sqrt{3} = 0 \quad \cdots (\text{答})$$

(4) この 2 次方程式の 2 つの解は $\tan \frac{\alpha}{2}$ と $\tan \frac{\beta}{2}$ であるから, 解と係数の関係より,

$$\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2} = -\frac{2}{c - \sqrt{3}}, \quad \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} = \frac{c + \sqrt{3}}{c - \sqrt{3}}$$

よって, 加法定理より,

$$\tan \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2}}{1 - \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \cdots (\text{答})$$

〔3〕

$$(1) \quad \overrightarrow{AD} = \frac{m}{m+n} \overrightarrow{AB} \text{ となるから, } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \text{ より,}$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}$$

$$= \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n} (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \frac{n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{m+n} \quad (\text{証明終})$$

(2) $\triangle DAE \sim \triangle OCE$ であり, 相似比は $DA : OC = m : m+n$ だから, 点 E は対角線 AC を $m : m+n$ に内分する。

$$\text{よって, } \overrightarrow{OE} = \frac{(m+n)\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OC}}{2m+n} \quad \cdots (\text{答})$$

$$(3) \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC} \text{ より, } \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} = (1, 0) + \frac{1}{3}(a, b)$$

$$\text{よって, } D\left(\frac{a+3}{3}, \frac{b}{3}\right) \text{ となるから,}$$

$$2 \text{ 点 } O, D \text{ を通る直線の方程式は } y = \frac{b}{a+3}x \quad \cdots (\text{答})$$

(4) $\overrightarrow{OD}$ と同じ向きをもつ単位ベクトル $\vec{e}$ は, (3)の結果より,

$$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{(a+3)^2 + b^2}}(a+3, b)$$

と表せる。点 H は直線 OD 上にあるから, この $\vec{e}$ を用いると,

$$\overrightarrow{OH} = |\overrightarrow{OH}| \vec{e} \quad \cdots \textcircled{1}$$

また, $\overrightarrow{OC}$ と $\overrightarrow{OH}$ のなす角を θ とすると,

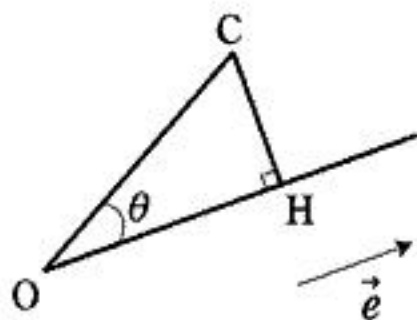
$$|\overrightarrow{OH}| = |\overrightarrow{OC}| \cos \theta = \overrightarrow{OC} \cdot \vec{e}$$

$$= \frac{a(a+3) + b^2}{\sqrt{(a+3)^2 + b^2}}$$

よって, ①より,

$$\overrightarrow{OH} = \frac{a^2 + 3a + b^2}{(a+3)^2 + b^2}(a+3, b)$$

$$\therefore H\left(\frac{(a^2 + 3a + b^2)(a+3)}{(a+3)^2 + b^2}, \frac{(a^2 + 3a + b^2)b}{(a+3)^2 + b^2}\right) \quad \cdots (\text{答})$$



〔4〕

(1) $f'(x) = 2x - 4$ より,

$$\begin{cases} l: y = (2p - 4)(x - p) + f(p) = (2p - 4)x - p^2 + 5 \\ m: y = (2q - 4)(x - q) + f(q) = (2q - 4)x - q^2 + 5 \end{cases}$$

この2直線の交点について,

$$r = (2p - 4)x - p^2 + 5 = (2q - 4)x - q^2 + 5 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\therefore x = \frac{p + q}{2}$$

これが点 R の x 座標となるから, $p + q = 5 \quad \cdots \textcircled{2}$ また, $a = 2p - 4$, $b = 2q - 4$ だから, $2a + b = 0$ より,

$$2p + q = 6 \quad \cdots \textcircled{3}$$

②, ③より, $p = 1$, $q = 4$ が得られ, よって, ①より, $r = -1$
以上より, $p = 1$, $q = 4$, $r = -1 \quad \cdots$ (答)

(2) (1)より,

$$\begin{cases} l: y = -2x + 4 \\ m: y = 4x - 11 \end{cases} \quad \cdots \text{(答)}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad S &= \int_1^{\frac{5}{2}} \{f(x) - (-2x + 4)\} dx + \int_{\frac{5}{2}}^4 \{f(x) - (4x - 11)\} dx \\ &= \int_1^{\frac{5}{2}} (x - 1)^2 dx + \int_{\frac{5}{2}}^4 (x - 4)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3} (x - 1)^3 \right]_1^{\frac{5}{2}} + \left[\frac{1}{3} (x - 4)^3 \right]_{\frac{5}{2}}^4 \\ &= \frac{9}{8} + \frac{9}{8} \\ &= \frac{9}{4} \quad \cdots \text{(答)} \end{aligned}$$

[5]

- (1) 偶数となるとき、1の位は2, 4の2通りで、残りの並べ方は4!通りだから、 $2 \cdot 4! = 48$ (通り) ... (答)

また、奇数となるのは偶数でないときだから、全事象から除けばよく、 $5! - 48 = 72$ (通り) ... (答)

- (2) 5 4 3 2 1の5枚のうち2枚を選んで交換すればよいから、

$$\frac{{}_5C_2}{5!} = \frac{1}{12} \quad \dots \text{(答)}$$

- (3) 5 4 3 2 1の5枚のうち3枚を選び、3枚とも元の位置に一致しないように並べ替えればよい。

ABCの3枚のカードをこのように並べ替える方法は、BCA, CABの2通りだから、

$$\frac{{}_5C_3 \cdot 2}{5!} = \frac{1}{6} \quad \dots \text{(答)}$$

- (4) 5 4 3 2 1と一致する確率は $\frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$ だから、期待金額は

$$60000 \times \frac{1}{120} + 6000 \times \frac{1}{12} + 600 \times \frac{1}{6} = 1100 \text{ (円)} \quad \dots \text{(答)}$$