

〔1〕

(1)

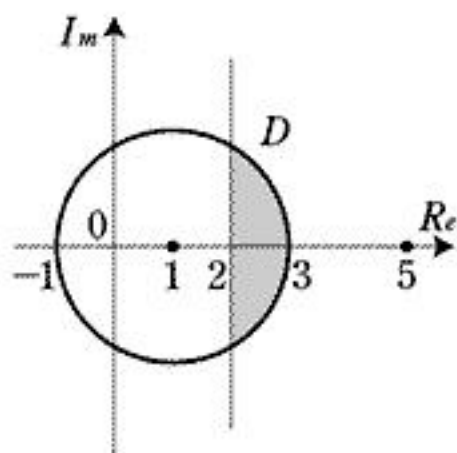
(i) $|z-5| \leq |z+1|$ …①

について考える。境界となる $|z-5|=|z+1|$ は 5 と -1 を両端とする線分の垂直二等分線、つまり $\operatorname{Re} z = 2$ となるから、①はこの直線によって区切られる領域のうちの 5 を含むほうである。

(ii) $2|z-2| \leq |z-5|$ …②

について考える。境界となる $2|z-2|=|z-5|$ は 2 と 5 を 1:2 に内分・外分する点を両端とする線分を直径とする円、つまり中心 1、半径 2 の円となるから、②はこの円によって区切られる領域のうちの 2 を含むほうである。

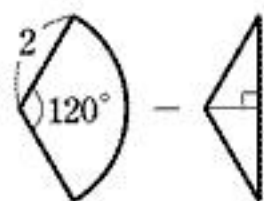
よって、 D つまり①かつ②を図示すると右図のようになり、境界を含む。



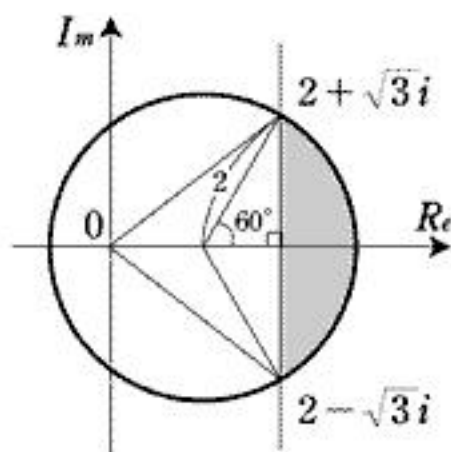
(2) 円と直線の交点は $2 \pm \sqrt{3}i$ となるから、

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \tan \theta \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \dots (\text{答})$$

(3) D の面積は、



$$= 4\pi \cdot \frac{1}{3} - \sqrt{3} = \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3} \quad \dots (\text{答})$$



[2]

$$(1) \quad x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0 \iff (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$$

よって、この円上の点 $(3, 3)$ における接線は、

$$(3-2)(x-2) + (3-1)(y-1) = 5 \quad \therefore y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2} \quad \cdots (\text{答})$$

(2) 真数条件は、 $2x-3 > 0$, $y > 0$, $(x-2)^2 + (y-1)^2 > 0$ より、

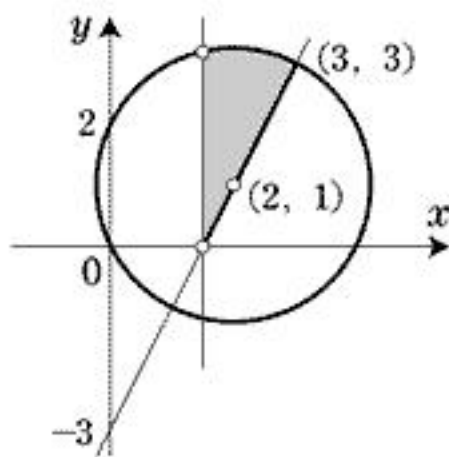
$$x > \frac{3}{2}, y > 0, (x, y) \neq (2, 1) \quad \cdots \textcircled{1}$$

また、連立不等式より、

$$\begin{cases} 2x-3 \leq y \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 5 \end{cases} \quad \cdots \textcircled{2}$$

よって、 $\textcircled{1}$ かつ $\textcircled{2}$ を図示すると右図の塗部のようになる。

ただし、境界は直線 $x = \frac{3}{2}$ と点 $(2, 1)$ を除く。



(3) $ax + y = k$ とすると、 k は直線 $y = -ax + k$ の y 切片を表す。

(1)の結果より、 $a \geq \frac{1}{2}$ のときは $(x, y) = (3, 3)$ のとき

k は最大となり、その値は $k = 3a + 3 \geq \frac{3}{2} + 3 > 4$ となり不適。

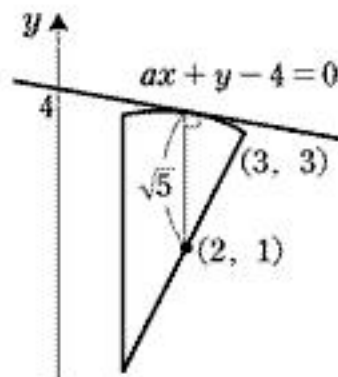
$0 < a < \frac{1}{2}$ のとき、 (x, y) が円と直線の接点となるとき $k = 4$

となればよいから、中心 $(2, 1)$ と直線との距離について、

$$\frac{|2a + 1 - 4|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{5} \quad a^2 + 12a - 4 = 0$$

$$a = -6 \pm 2\sqrt{10}$$

$0 < a < \frac{1}{2}$ をみたすのは、 $a = 2\sqrt{10} - 6 \quad \cdots (\text{答})$



[3]

$$\begin{cases} 2X - Y = E & \cdots \textcircled{1} \\ XY = O & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

(1) ②に逆行列 X^{-1} を左からかけて、 $Y=O$ となるから、①より、

$$2X = E \quad \therefore X = \frac{1}{2}E, \quad Y = O \quad \cdots (\text{答})$$

(2) X が逆行列をもたないとき、 $ad - bc = 0$ であるから、ケーリー・ハミルトンの定理より、 $X^2 - (a+d)X = O \quad \cdots \textcircled{3}$

また、①に左から X をかけると、②により、 $2X^2 = X \quad \cdots \textcircled{4}$

よって、③、④から X^2 を消去すると、

$$(2a + 2d - 1)X = O \quad \cdots (\text{答}) \quad \cdots \textcircled{5}$$

(3) X が逆行列をもたないことから⑤が成り立ち、 $X \neq O$ であることから、 $2a + 2d - 1 = 0$

$$\text{よって, } \begin{cases} a + d = \frac{1}{2} \\ ad = bc \end{cases}$$

となり、

a, d は 2 次方程式 $x^2 - \frac{1}{2}x + bc = 0$ の 2 解となるから、

$$(a, d) = \left(\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} - bc}, \quad \frac{1}{4} \mp \sqrt{\frac{1}{16} - bc} \right) \quad (\text{複号同順})$$

$\cdots (\text{答})$

[4]

$$(1) \quad \begin{cases} 2 \cos b \sin(a - \theta) = \sin(a + b - \theta) - \sin(b - a + \theta) \\ 2 \cos a \sin(b - \theta) = \sin(a + b - \theta) - \sin(a - b + \theta) \end{cases}$$

より, $\cos b \sin(a - \theta) = \cos a \sin(b - \theta)$ が成り立っているとき,

$$\sin(b - a + \theta) - \sin(a - b + \theta) = 0 \quad 2 \cos \theta \sin(b - a) = 0$$

$$\therefore \cos \theta \sin(b - a) = 0 \quad \cdots \textcircled{1} \quad (\text{証明終})$$

(2) 2つの交点の y 座標について,

$$\begin{cases} A \cos a = \sin(a - \theta) \quad \cdots \textcircled{2} \\ A \cos b = \sin(b - \theta) \end{cases}$$

であるから, (1)の仮定をみだし, $\textcircled{1}$ が成り立つ。

(i) $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ のとき, $\textcircled{1}$ は $\sin(b - a) = 0$ となり,

$$0 < b - a < 2\pi \text{ より, } b - a = \pi$$

(ii) $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき, 後者の曲線は $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$

となるから, 2曲線の交点の x 座標は $a = \frac{\pi}{2}$, $b = \frac{3}{2}\pi$ となり, $b - a = \pi$

よって, (i)(ii) より, $b - a = \pi$ (証明終)

$$\begin{aligned} (3) \quad S &= \int_a^{a+\pi} \{\sin(x - \theta) - A \cos x\} dx \\ &= [-\cos(x - \theta) - A \sin x]_a^{a+\pi} \\ &= 2\{\cos(a - \theta) + A \sin a\} \quad \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad \frac{S^2}{4} &= \cos^2(a - \theta) + 2A \sin a \cos(a - \theta) + A^2 \sin^2 a \\ &= 1 - \sin^2(a - \theta) + 2A \sin a \cos(a - \theta) + A^2 \sin^2 a \end{aligned}$$

ここで, $\textcircled{2}$ より, $\sin(a - \theta) - A \cos a = 0$

両辺を2乗して, $\sin^2(a - \theta) - 2A \cos a \sin(a - \theta) + A^2 \cos^2 a = 0$ となるから,

$$\begin{aligned} \frac{S^2}{4} &= 1 + 2A\{\sin a \cos(a - \theta) - \cos a \sin(a - \theta)\} \\ &\quad + A^2(\sin^2 a + \cos^2 a) \\ &= 1 + 2A \sin\{a - (a - \theta)\} + A^2 \\ &= 1 + 2A \sin \theta + A^2 \end{aligned}$$

$$\therefore S^2 = 4(1 + 2A \sin \theta + A^2) \quad \cdots (\text{答})$$

(5) $0 \leq \theta \leq \pi$ より, S^2 が最大になるのは $\theta = \frac{\pi}{2}$ のときで,

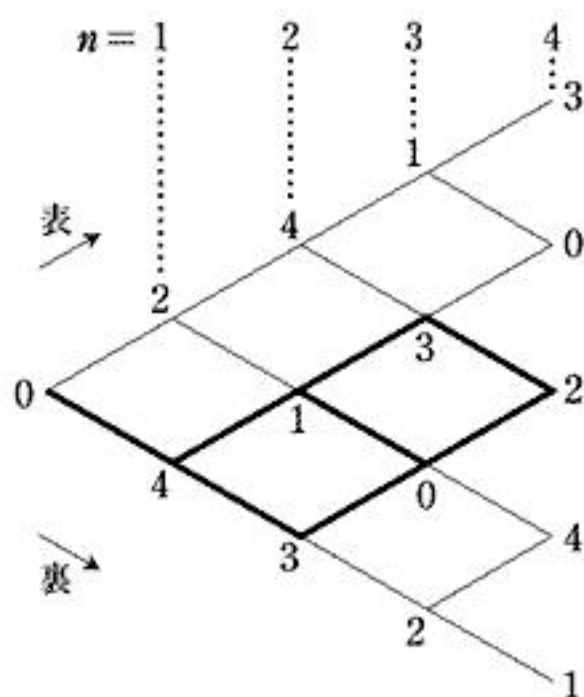
その値は, $S^2 = 4(1 + 2A + A^2) = 4(1 + A)^2$ となるから,

S は $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき最大値 $2(1 + A)$ をとる。 $\cdots (\text{答})$

[5]

(1) 右の樹形図により,

$$\begin{cases} p_2(1) = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2} \\ p_3(2) = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \quad \dots (\text{答}) \\ p_3(3) = \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8} \end{cases}$$



(2) 樹形図の太線部分となるから,

$$\frac{3}{2^4} = \frac{3}{16} \quad \dots (\text{答})$$

(3) $n+1$ 回目で目盛りが 0 となるのは, n 回目で目盛りが 3 または 1 であったときのみで, それぞれ表, 裏が出れば 0 に移動するから,

$$\begin{aligned} p_{n+1}(0) &= \frac{1}{2} p_n(3) + \frac{1}{2} p_n(1) \\ &= \frac{1}{2} \{p_n(3) + p_n(1)\} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (\text{証明終}) \end{aligned}$$

$$(4) \sum_{i=0}^4 p_n(i) z^i = \frac{(z^2 + z^{-1})^n}{2^n} \quad \dots \textcircled{1}$$

(i) $n=1$ のとき, ①の左辺は,

$$p_1(2)z^2 + p_1(4)z^4 = \frac{z^2 + z^{-1}}{2} \text{ となるから } \textcircled{1} \text{ が成り立つ。}$$

(ii) $n=k$ のとき, ①が成り立つと仮定する。(3)と同様にして

$$p_{n+1}(i) = \frac{1}{2} \{p_n(i-2) + p_n(i+1)\} \quad (i=0, 1, 2, 3, 4)$$

(ただし, $p_n(i+5) = p_n(i)$ と定義する。)

が成り立つから,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^4 p_{k+1}(i) z^i &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^4 p_k(i-2) z^i + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^4 p_k(i+1) z^i \\ &= \frac{z^2}{2} \sum_{i=0}^4 p_k(i-2) z^{i-2} + \frac{z^{-1}}{2} \sum_{i=0}^4 p_k(i+1) z^{i+1} \end{aligned}$$

ここで, $p_n(i+5) = p_n(i)$, $z^5 = 1$ より,

$$\sum_{i=0}^4 p_k(i-2) z^{i-2} = \sum_{i=0}^4 p_k(i+1) z^{i+1} = \sum_{i=0}^4 p_k(i) z^i$$

であるから, 仮定により,

$$\sum_{i=0}^4 p_{k+1}(i) z^i = \frac{z^2 + z^{-1}}{2} \frac{(z^2 + z^{-1})^k}{2^k} = \frac{(z^2 + z^{-1})^{k+1}}{2^{k+1}}$$

よって, $n=k+1$ のときも ①が成り立つ。

(i)(ii)から, 数学的帰納法によりすべての自然数 n に対して ①が成り立つ。(証明終)