

学 力 検 査 問 題

数 学

数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲ
数学A，数学B，数学C

平成16年2月25日

自 9 時00分

至11時30分

答案作成上の注意

- 1 この問題冊子には，数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲ，数学A(数と式，数列)，数学B(ベクトル，複素数と複素数平面)，数学C(行列と線形計算，いろいろな曲線)の問題が5問あります。
総ページは6ページです。
- 2 解答用紙は5枚(表面)です。解答はすべて解答用紙の所定の解答欄に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。
- 3 受験番号は，すべての解答用紙の所定の欄(2ヶ所)に必ず記入しなさい。
- 4 試験終了後は，解答用紙の右上の番号の順に並べなさい。
- 5 配付した解答用紙は，持ち出してはいけません。

[1] 複素数平面上で不等式

$$2|z-2| \leq |z-5| \leq |z+1|$$

を満たす点 z が描く図形を D とする。

(1) D を図示せよ。

(2) 点 z が D 上を動くものとする。 $\arg z = \theta$ とするとき、 $\tan \theta$ の値のとりうる範囲を求めよ。

(3) D の面積を求めよ。

[2] 次の問いに答えよ。

(1) 点 $(3, 3)$ における円 $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ の接線の方程式を求めよ。

(2) 次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(2x - 3) \geq \log_{\frac{1}{2}} y \\ \log_2(x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5) \leq \log_2 5 \end{cases}$$

(3) a を正の数とする。点 (x, y) が (2) で求めた領域を動くとき、 $ax + y$ の最大値が 4 になるように a の値を定めよ。

[3] X, Y はともに実数を成分とする 2 次の正方行列で

$$\begin{cases} 2X - Y = E \\ XY = O \end{cases}$$

を満たしているものとする。ただし、 E, O は、それぞれ 2 次の単位行列、零行列とする。 $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくとき、次の問いに答えよ。

- (1) X が逆行列をもつとき、 X, Y を求めよ。
- (2) X が逆行列をもたないとき、 $(2a + 2d - 1)X$ を求めよ。
- (3) X は零行列でなく、かつ X が逆行列をもたないとき、 a と d を b, c で表せ。ただし、 b, c は $bc \leq \frac{1}{16}$ を満たすものとする。

[4] A を正の定数, θ は $0 \leq \theta \leq \pi$ を満たす実数とし, 2 つの曲線

$$y = A \cos x, \quad y = \sin(x - \theta) \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

によって囲まれた図形の面積を S とする。また, この 2 つの曲線の交点の x 座標を a, b ($a < b$) とするとき, 次の問いに答えよ。

(1) $\cos b \sin(a - \theta) = \cos a \sin(b - \theta)$ が成り立っているとき,

$$\cos \theta \sin(b - a) = 0$$

を示せ。

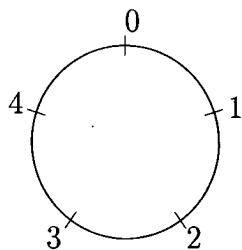
(2) $b - a = \pi$ を示せ。

(3) S を A, a, θ を用いて表せ。

(4) S^2 を A, θ を用いて表せ。

(5) S を最大にする θ の値およびそのときの S の値を求めよ。

- [5] 円周を 5 等分して図のように 0 から 4 の目盛りを
 ふる。初めに点 P を目盛り 0 の位置に置く。硬貨を
 1 回投げるごとに、



表が出れば、点 P を右回りに 2 目盛り動かし、

裏が出れば、点 P を左回りに 1 目盛り動かす

という操作をくり返し行う。硬貨を n 回投げたあと、
 点 P が目盛り i の位置にある確率を $p_n(i)$ と表す。

(1) $p_2(1)$, $p_3(2)$, $p_3(3)$ を求めよ。

(2) 硬貨を 4 回投げて、点 P がはじめて目盛り 2 の位置で止まる確率
 を求めよ。

(3) $p_{n+1}(0) = \frac{1}{2}\{p_n(3) + p_n(1)\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を示せ。

(4) z を $z^5 = 1$ を満たす複素数とする。すべての自然数 n に対して、

$$\sum_{i=0}^4 p_n(i) z^i = \frac{(z^2 + z^{-1})^n}{2^n}$$

が成り立つことを示せ。