

1

(1)

$$P(x) = (x + m)(x + 1)^2 + x + 1$$

とおくと,

$$P(x) = (x + m)(x - 1)^2 + 4(x - 1)^2 + (4m + 9)x - 3$$

と変形できるので, $(x - 1)^2$ で割った余りは $(4m + 9)x - 3$ になる. これが, $x + c$ と一致するので, 係数比較して,

$$m = -2, c = -3$$

となり,

$$P(x) = x^3 - 2x - 1$$

となる.

(2)

$t = \log_{10} x$ と置く.

$$y = \frac{100}{x}$$

より与式は,

$$\begin{aligned} (\log_{10} x)^3 + (\log_{10} 100 - \log_{10} x)^3 &= 2(3t^2 - 6t + 4) \\ &= 2\{3(t - 1)^2 + 1\} \end{aligned}$$

となり, $t = 1$ のとき最小値 2 をとる. このとき,

$$x = y = 10$$

となる.

2

(1)

(*) を変形すると,

$$\left(x + \sqrt{2} \sin \theta\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{17}}{4}\right)^2 = \sin^2 \theta$$

となるので, 中心の座標は

$$\left(-\sqrt{2} \sin \theta, \frac{\sqrt{17}}{4}\right)$$

であり, $0^\circ < \theta < 180^\circ$ より $\sin \theta > 0$ なので, 半径は

$$\sin \theta$$

となる.

(2)

2 円が共有点をもたないのは,

(i) 2 円が互いに外部にある.

(ii) 一方の円が他方の円を内部に含む.

のいずれかの場合である.

(i) のとき, 2 円の中心間の距離が 2 円の半径の和よりも大きくなればよいので,

$$\sqrt{\left(\sqrt{2} \sin \theta\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{17}}{4}\right)^2} > \sin \theta + \frac{3}{4}$$

$0 < \sin \theta < 1$ に注意して, これを解くと,

$$\sin \theta < \frac{1}{2}$$

となるので, これを満たす θ の範囲は,

$$0^\circ < \theta < 30^\circ, 150^\circ < \theta < 180^\circ$$

となる.

(ii) のとき, (*) の中心は θ の値に関わらず (**) の外部にあるので, (*) の円が (**) の内部に含む場合について考えればよい. このためには,

$$\sin \theta > \sqrt{2 \sin^2 \theta + \frac{17}{16}} + \frac{3}{4}$$

となればよいので, これを解いて,

$$(2 \sin \theta + 1)(\sin \theta + 1) < 0$$

を得るが, これは与えられた θ の範囲に解をもたない.

以上 (i), (ii) より,

$$0^\circ < \theta < 30^\circ, 150^\circ < \theta < 180^\circ$$

が求める範囲である.

3

(1)

余弦定理より,

$$\cos \angle OAB = \frac{3}{4}$$

と求まるので,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \times 6 \times \frac{3}{4} = \frac{45}{2}$$

となる.

(2)

$\vec{PE} \cdot \vec{a} = 0$ となるので,

$$\left\{ k\vec{a} - \left(\frac{2}{5}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} \right) \right\} \cdot \vec{a} = 0$$

となる. これを解いて,

$$k = \frac{7}{10}$$

を得る.

(3)

$$|\vec{PE}|^2 = \left(\frac{3}{10}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} \right) \cdot \left(\frac{3}{10}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} \right)$$

なので, (1) で求めた $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を考慮して,

$$|\vec{PE}|^2 = \frac{7}{4}$$

を得る. したがって,

$$|\vec{PE}| = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

となる.

4

(1)

表が出る事象を X, 裏が出る事象を Y と表記することにする.

2 回の試行の後に A にいるためには, XX または YY となればよいので,

$$P_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

となる.

(2)

3 回の試行の後に A にいるためには, XXX または YYY となればよいので,

$$P_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$$

となる.

(3)

4 回の試行の後に A にいるためには XXYY または YYXX となればよいので,

$$Q_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}$$

となる.

(4)

1 回目の試行で B または C に移り, 2 回目から $n - 1$ 目の試行では A 以外の点に移り, n 回目で A に移ればよいので,

$$Q_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

となる.

5

(1)

L_t と L_s が直交するので,

$$(2t-3)(2s-3) = -1$$

となる. このとき, L_t と L_s を連立して交点の x 座標を求めると,

$$(t-s)x = (t-s)\frac{s+t}{2}$$

となるが, 明らかに $s \neq t$ なので,

$$x = \frac{s+t}{2}$$

となる. これより, 交点の y 座標は,

$$y = (2t-3)\frac{s+t}{2} - t^2 = -\frac{5}{2}$$

となり, s, t によらない定数となる.

(2)

$y = ax^2 + bx + c$ と $y = (2t-3)x - t^2$ が接するとき, 2 式を連立して得られる,

$$ax^2 + (b+3-2t)x + c+t^2 = 0$$

の判別式が 0 となる. したがって,

$$D = (b+3-2t)^2 - 4a(c+t^2) = 0$$

となり, これが t の値に関わらず成立していればよいので,

$$a = 1, b = -3, c = 0$$

となる.

(3)

$y = x^2 - 3x$ と $y = (2t-3)x - t^2$ を連立すると,

$$(x-t)^2 = 0$$

となるので, 接点の x 座標は t であることが分かる. 同様にして, L_{t+2} と放物線との接点の x 座標は $t+2$ となる. さらに, L_t と L_{t+2} の交点は,

$$(2t-3)x - t^2 = \{2(t+2)-3\}x - (t+2)^2$$

を解いて, $x = t+1$ となる. したがって, 求める面積は,

$$\int_t^{t+1} (x-t)^2 dx + \int_{t+1}^{t+2} \{x-(t+2)\}^2 dx = \frac{2}{3}$$

となり s, t によらない定数となる.