

1

(1)

それぞれ計算すると,

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

$$J^3 = JJ^2 = J(-I) = -J$$

$$J^4 = J^2J^2 = (-I)(-I) = I$$

となり, 題意を満たす.

(2)

$$aI + bJ = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

これが逆行列をもつための必要十分条件は,

$$\det(aI + bJ) \neq 0$$

である.

$$\det(aI + bJ) = a^2 + b^2$$

なので, 求める条件は「 a, b の少なくとも一方が0でない」となる.

(3)

(1)より,

$$\begin{aligned} sI + (1 + st)J + tJ^2 + st^2J^3 + t^2J^4 &= (s - t + t^2)I + (1 + st - st^2)J \\ &= \begin{pmatrix} s - t + t^2 & st^2 - st - 1 \\ -st^2 + st + 1 & s - t + t^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる. これが逆行列をもたないと仮定すると, (2)より,

$$\begin{cases} s - t + t^2 = 0 & \cdots \textcircled{1} \\ 1 + st - st^2 = 0 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

となる. ①より, $s = t - t^2$ となるので, これを ②に代入して,

$$1 + (t - t^2)t - (t - t^2)t^2 = 0$$

$$t^4 + t^2 + 1 = \left(t^2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$$

となるが, これを満たす実数 t は存在しない. したがって, 逆行列をもたないとした仮定が間違っているので, 逆行列をもつ.

2

(1)

(*) の純虚数解を ki (k は 0 でない実数) とおく. これを代入して,

$$(ki)^3 + a(ki)^2 + b(ki) + c = 0$$

となる. これを整理して,

$$(c - ak^2) + k(b - k^2)i = 0$$

となるので,

$$\begin{cases} c - ak^2 = 0 \\ k(b - k^2) = 0 \end{cases}$$

となる. $k \neq 0$ に注意して,

$$c = ak^2, \quad b = k^2$$

となるので,

$$ab - c = 0$$

となる.

(2)

$$x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$$

を解くと,

$$x = -2, \quad 1 \pm \sqrt{3}i$$

となる. また, (1) より (*) は,

$$x^3 + ax^2 + bx + ab = (x^2 + b)(x + a) = 0$$

となるので, $b > 0$ に注意してこれを解くと,

$$x = -a, \quad \pm \sqrt{b}i$$

となる. したがって, 条件を満たすためには,

$$a = 2, \quad b = \frac{4}{3}$$

となり, $ab - c = 0$ より,

$$c = \frac{8}{3}$$

となる.

3

(1)

X_2 が A となるのは,

(i) $A \rightarrow B \rightarrow A$

(ii) $A \rightarrow C \rightarrow A$

(iii) $A \rightarrow A \rightarrow A$

のいずれかの動きをしたときである.

また, 硬貨が 2 枚とも表, 2 枚とも裏, 表と裏となる確率はそれぞれ $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ である. したがって, (i), (ii) の確率は,

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

であり, (iii) の確率は,

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

である. したがって,

$$P_2 = \frac{1}{16} \times 2 + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

となる.

(2)

1 回目に B に行く場合について考える.

はじめ	X_1	X_2	X_3	X_4	確率
A	B	B	B	A	$\frac{1}{64}$
A	B	B	C	A	$\frac{1}{128}$
A	B	C	C	A	$\frac{1}{128}$
A	B	C	B	A	$\frac{1}{256}$

対称性から, 1 回目に C に行く場合の確率も等しいので,

$$Q_4 = \frac{9}{256} \times 2 = \frac{9}{128}$$

(3)

題意を満たすためには,

(i) 1 回目に B または C に行き,

(ii) 2 回目から $n-1$ 回目まではその場にとどまるか, A 以外の場所に移動し,

(iii) n 回目で A に行く.

以上の経過をたどればよい. したがって,

$$\begin{aligned}
Q_n &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} \times \frac{1}{4} \\
&= \frac{3^{n-2}}{2^{2n-1}} \left(= \frac{1}{8} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} \right)
\end{aligned}$$

(4)

P_n に関する漸化式を作って考える.

X_{n-1}		X_n	確率
A	$\rightarrow$	A	$\frac{1}{2}$
B or C	$\rightarrow$	A	$\frac{1}{4}$

上の表から, 次の P_{n-1} と P_n の関係式が得られる.

$$\begin{aligned}
P_n &= \frac{1}{2}P_{n-1} + \frac{1}{4}(1 - P_{n-1}) \\
&= \frac{1}{4}P_{n-1} + \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

この式は,

$$P_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \left(P_{n-1} - \frac{1}{3} \right)$$

と変形できるので,

$$P_n - \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \left(P_1 - \frac{1}{3}\right)$$

となる. これを整理して,

$$P_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

となる.

4

(1)

$f(x)$ は $x = \frac{1}{2}$ で極値をとるので, $f' \left(\frac{1}{2} \right) = 0$ である.

$$f'(x) = \frac{-4x^2 - 2ax + 4}{(x^2 + 1)^2}$$

に $x = \frac{1}{2}$ を代入して,

$$-1 - a + 4 = 0$$

したがって,

$$a = 3$$

となる.

(2)

$$f'(x) = \frac{-2(2x - 1)(x + 2)}{(x^2 + 1)^2}$$

より, $f(x)$ の増減表は下のようになる.

x		-2		$\frac{1}{2}$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

また,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

より, 最大値は,

$$f \left(\frac{1}{2} \right) = 4$$

最小値は,

$$f(-2) = -1$$

となる.

(3)

$$f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1} + \frac{3}{x^2 + 1}$$

となるので,

$$\int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 1} dx + 3 \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

となる. 右辺第2項において, $x = \tan \theta$ と変数変換すると,

$$3 \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = 3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta$$

となるので,

$$\int_0^1 f(x) dx = 2 \log 2 + \frac{3}{4} \pi$$

となる.

5

(1)

$$f'(x) = 12 \left(x - \frac{1}{2} \right) \left(x + \frac{1}{2} \right)$$

より、 $f(x)$ の増減表は以下のとおり。

x		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

したがって、極大値は、

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

極小値は、

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

となる。

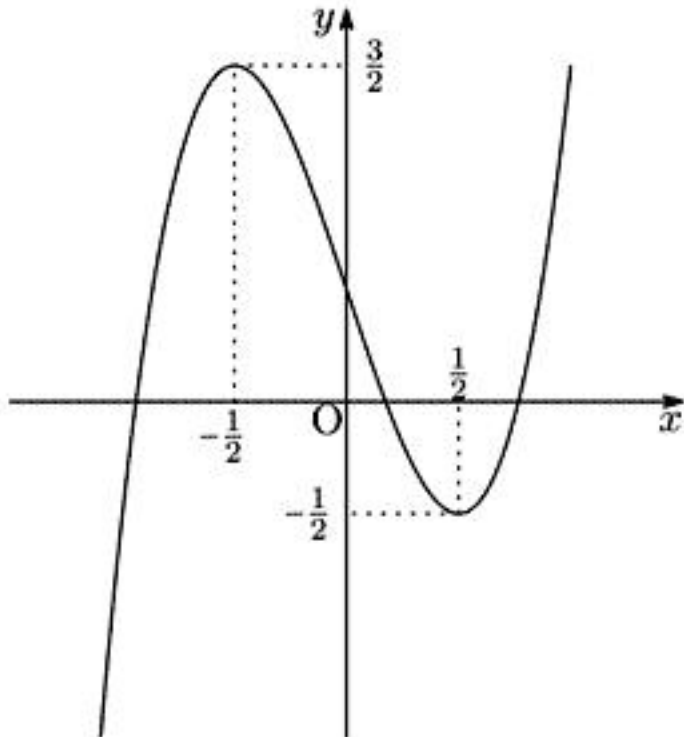
(2)

$$\begin{aligned} f(k) &= 4 \cos^3 \frac{2}{9} \pi - 3 \cos \frac{2}{9} \pi + \frac{1}{2} \\ &= \cos \frac{2}{3} \pi + \frac{1}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

より、 $x = k$ は $f(x) = 0$ の解である。

(3)

(1) の増減表から、 $f(x)$ のグラフは以下ようになる。



$$\frac{1}{2} = \cos \frac{1}{3} \pi = \cos \frac{3}{9} \pi$$

であることに着目すると、 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で $\cos x$ は単調減少するので、

$$\frac{1}{2} < \cos \frac{2}{9} \pi = k$$

である。これとグラフより、 $x = k$ は $f(x) = 0$ の最大の解であることが分かる。さらに、

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{16}$$

となるので、グラフより、

$$\frac{3}{4} < k$$

であることが分かる。

(4)

まず、 $3.14 < \pi$ より、

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{8}}{4} < \frac{3}{4} < \frac{\pi}{4} \quad \cdots \textcircled{1}$$

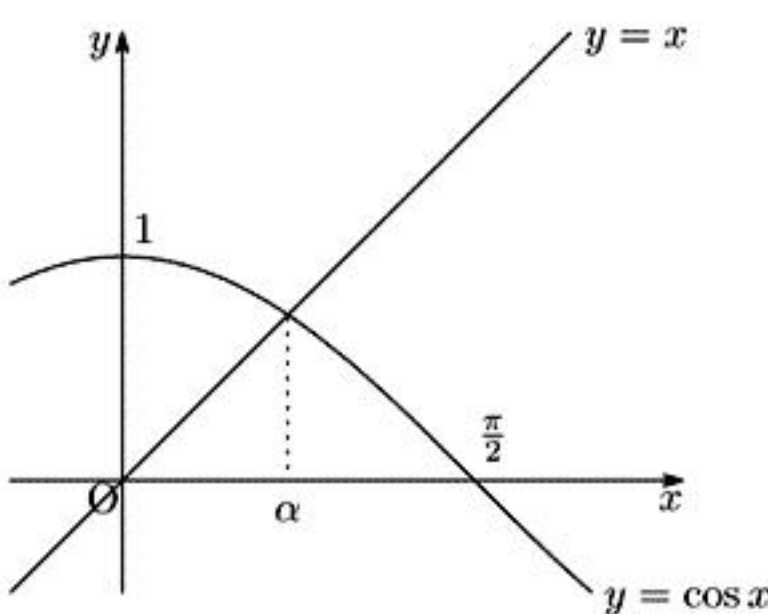
が言える。また、 $\pi < 3.15$ より、

$$\frac{2}{9} \pi < \frac{2}{9} \times 3.15 = \frac{2.1}{3} = \frac{8.4}{12} < \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

が言える。したがって、(3) の結果と合わせて、

$$\frac{2}{9} \pi < \cos \frac{2}{9} \pi \quad \cdots \textcircled{2}$$

さらに、 $y = \cos x$ と $y = x$ のグラフを図示すると以下のとおり。



①、② と上のグラフから、

$$\frac{2\pi}{9} < \alpha < \frac{\pi}{4}$$

が成り立つ。