

[1]

(1) $2^2 < \sqrt{7}^2 < 3^2$ より $\sqrt{7}$ の整数部分は 2. したがって $p = \sqrt{7} - 2$ だから

$$\frac{3}{p} - p = \frac{3 - (11 - 4\sqrt{7})}{\sqrt{7} - 2} = \frac{4(\sqrt{7} - 2)}{\sqrt{7} - 2} = 4$$

この数は整数 4 である.

(2) a と $3a$ が解なので

$$\begin{cases} \log_3 a = ka \\ \log_3 3a = 3ka \end{cases}$$

$$\log_3 3a = 3ka = 3 \log_3 a$$

$$3a = a^3$$

$$a(a^2 - 3) = 0$$

ここで真数の条件から $a > 0$ なので

$$a = \sqrt{3}$$

$$\therefore k = \frac{\log_3 \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

[2]

(1) 数列 $\{b_n\}$ は公比が 3 の等比数列なので

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 3b_n \\ a_{n+1} + p(n+1) + q &= 3(a_n + pn + q) \\ 3a_n - n + pn + p + q &= 3a_n + 3pn + 3q \\ (2p+1)n + 2q - p &= 0 \end{aligned}$$

この等式がいかなる n についても成り立つので

$$2p+1=0 \quad 2q-p=0$$

$$\therefore p = -\frac{1}{2}, \quad q = -\frac{1}{4}$$

(2) $b_1 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ より $b_n = \frac{3^{n-1}}{4}$ なので

$$\begin{aligned} a_n &= b_n - pn - q \\ &= \frac{1}{4}(3^{n-1} + 2n + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \sum_{k=1}^n a_k &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n (3^{k-1} + 2k + 1) \\ &= \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^n 3^{k-1} + 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{3^n - 1}{3 - 1} + n(n+1) + n \right) \\ &= \frac{1}{8} (3^n + 2n^2 + 4n - 1) \end{aligned}$$

[3]

(1) 玉が点 X に落ちてくる確率を $P(X)$ で表すことにすると

$$P(B_1) = p, \quad P(B_2) = 1 - p$$

なので

$$P(C_1) = P(B_1)p = p^2$$

$$P(C_2) = P(B_1)(1 - p) + P(B_2)p = 2p(1 - p)$$

$$P(C_3) = P(B_2)(1 - p) = (1 - p)^2$$

(2) (1) より

$$\begin{cases} p^2 < 2p(1 - p) & \Leftrightarrow 0 < p(2 - 3p) \\ (1 - p)^2 < 2p(1 - p) & \Leftrightarrow 0 < (1 - p)(3p - 1) \end{cases}$$

$0 < p < 1$ に注意してこれを解くと

$$\frac{1}{3} < p < \frac{2}{3}$$

(3) (1) と同様に計算すると

$$\begin{cases} P(D_1) = P(C_1)p = p^3 \\ P(D_2) = P(C_1)(1 - p) + P(C_2)p = 3p^2(1 - p) \\ P(D_3) = P(C_2)(1 - p) + P(C_3)p = 3p(1 - p)^2 \\ P(D_4) = P(C_3)(1 - p) = (1 - p)^3 \end{cases}$$

したがって、 $0 < p < 1$ に注意して $P(D_3)$ が最大になる条件を解くと

$$\begin{cases} p^3 < 3p(1 - p)^2 & \Rightarrow 0 < p < \frac{3 - \sqrt{3}}{2} \\ 3p^2(1 - p) < 3p(1 - p)^2 & \Rightarrow 0 < p < \frac{1}{2} \\ (1 - p)^3 < 3p(1 - p)^2 & \Rightarrow \frac{1}{4} < p < 1 \end{cases}$$

となるので、これらを纏めて

$$\frac{1}{4} < p < \frac{1}{2}$$

[4]

(1) $\overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ より $\overrightarrow{OP'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$ を満たす点 P' を取れば

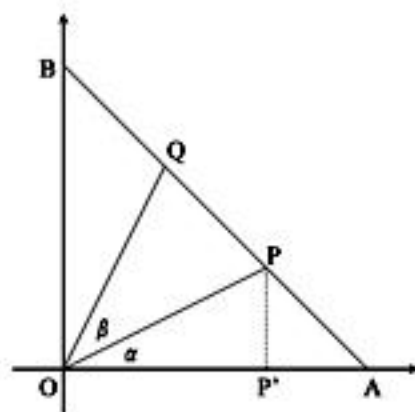
$$|\overrightarrow{OP'}| = \frac{2}{3}, \quad |\overrightarrow{P'P}| = |\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}| = \frac{1}{3}, \quad \overrightarrow{OP'} \perp \overrightarrow{P'P}$$

より $|\overrightarrow{OP}| = \frac{\sqrt{5}}{3}$. したがって

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

また, 対称性から $\angle BOQ = \alpha$ なので

$$\cos \beta = \cos(90^\circ - 2\alpha) = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{4}{5}$$



(2) (証明)

(1) より

$$\cos \alpha - \cos 30^\circ = \frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{80} - \sqrt{75}}{10} > 0$$

$$\cos 30^\circ - \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{4}{5} = \frac{\sqrt{75} - \sqrt{64}}{10} > 0$$

なので $\cos \beta < \cos 30^\circ < \cos \alpha$. ここで関数 $\cos \theta$ は $0^\circ < \theta < 90^\circ$ で単調減少であり, 明らかに $0^\circ < \alpha, \beta < 90^\circ$ なので

$$\alpha < 30^\circ < \beta$$

(証明終)

(3)

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OR}|^2 &= k^2|\overrightarrow{OA}|^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + (1-k)^2|\overrightarrow{OB}|^2 \\ &= k^2 + (1-k)^2 \\ &= 2k^2 - 2k + 1 \end{aligned}$$

(4) $\angle AOR = 2\alpha$ なので, $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = \frac{3}{5}$ より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OA} &= k|\overrightarrow{OA}|^2 + (1-k)\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \\ \sqrt{2k^2 - 2k + 1} \cos 2\alpha &= k \\ 3\sqrt{2k^2 - 2k + 1} &= 5k \\ (7k - 3)(k + 3) &= 0 \\ k &= -3, \frac{3}{7} \end{aligned}$$

R は線分 PQ 上にあるので $\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{2}{3}$. したがって

$$k = \frac{3}{7}$$

[5]

(1) 点 P における放物線の傾き $-p + a$ は直線の傾き -2 に等しいので

$$a = p - 2$$

次に、放物線は点 P を通るので

$$q = -\frac{1}{2}p^2 + ap = \frac{1}{2}p^2 - 2p$$

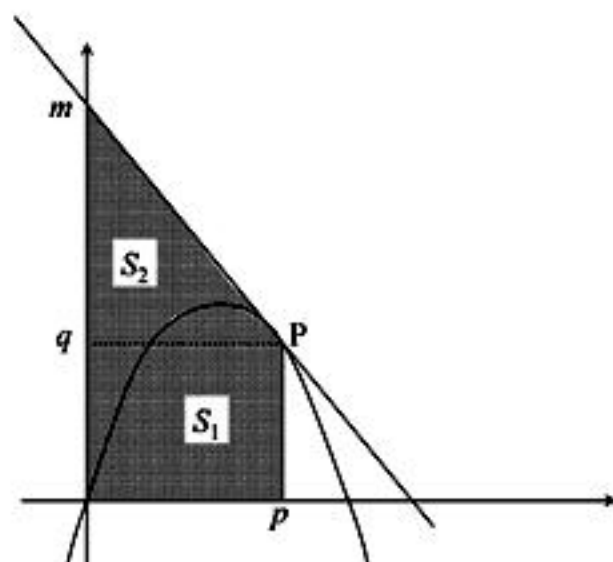
また、直線も点 P を通るので

$$m = q + 2p = \frac{1}{2}p^2$$

(2) S_1 と S_2 は図の斜線部の面積なので

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^p -\frac{1}{2}x^2 + ax \, dx \\ &= \frac{1}{2}ap^2 - \frac{1}{6}p^3 \\ &= \frac{1}{3}p^3 - p^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2}(m + q)p - S_1 \\ &= \frac{1}{2}(p^2 - 2p)p - \frac{1}{3}p^3 + p^2 \\ &= \frac{1}{6}p^3 \end{aligned}$$



(3) (証明)

$$S_1 > 0 \text{ なので } \frac{1}{2} < \frac{S_2}{S_1} < 2 \iff \frac{1}{2}S_1 < S_2 < 2S_1 \text{ より,}$$

$$\frac{1}{2}S_1 < S_2 < 2S_1$$

が示せばよい。ここで $a > 2$ と $p = a + 2$ より $p > 4$ に注意してそれぞれの項を比較すると

$$S_2 - \frac{1}{2}S_1 = \frac{1}{2}p^2 > 0$$

$$2S_1 - S_2 = \frac{1}{2}p^3 - 2p^2 = \left(\frac{1}{2}p - 2\right)p^2 > 0 \quad (\because p > 4)$$

したがって

$$\frac{1}{2}S_1 < S_2 < 2S_1$$

$$\therefore \frac{1}{2} < \frac{S_2}{S_1} < 2$$

(証明終)