

[1]

$$(1) \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3A$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = 3A^2 = 9A = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} (xA - E)^3 &= xA - E \\ x^3 A^3 - 3x^2 A^2 + 3xA - E &= xA - E \\ (9x^3 - 9x^2 + 2x)A &= O \end{aligned}$$

ここで, $A \neq O$ なので

$$9x^3 - 9x^2 + 2x = x(3x - 1)(3x - 2) = 0$$

$x > 0$ より

$$x = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$$

(3) (2) より $x_0 = \frac{1}{3}$ なので

$$p_1 A + q_1 E = \frac{1}{3} A - E$$

ここで $A \neq kE$ なので

$$p_1 = \frac{1}{3}, \quad q_1 = -1$$

次に $p_{n+1}A + q_{n+1}E = (p_nA + q_nE)(x_0A - E) = \frac{1}{3}q_nA - q_nE$ なので, 同様に $A \neq kE$ より

$$\begin{cases} p_{n+1} = \frac{1}{3}q_n \\ q_{n+1} = -q_n \end{cases}$$

この式から, $q_n = (-1)^n$ は明らかなので, $n \geq 2$ で

$$p_n = \frac{1}{3}(-1)^{n-1}, \quad q_n = (-1)^n$$

この式は $n = 1$ でも成り立つ.

[2]

(1) (証明)

与えられた $\{a_n\}$ の漸化式から

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= a_{n+1} + 2a_n \\ a_{n+2} + a_{n+1} &= 2(a_{n+1} + a_n) \\ \therefore b_{n+1} &= 2b_n \end{aligned}$$

したがって数列 $\{b_n\}$ は公比 2 の等比数列である.

(証明終)

(2) $b_1 = 2 + 1 = 3$ より $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ なので

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} b_k &= 3 \sum_{k=1}^{n-1} (-2)^{k-1} \\ &= \frac{3\{1 - (-2)^{n-1}\}}{1 - (-2)} \\ &= 1 - (-2)^{n-1} \end{aligned}$$

(3) $n \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} b_k &= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} (a_{k+1} + a_k) \\ 1 - (-2)^{n-1} &= \sum_{k=2}^n (-1)^k a_k - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k a_k \\ 1 - (-2)^{n-1} &= (-1)^n a_n + a_1 = (-1)^n a_n + 2 \\ (-1)^n a_n &= -(-2)^{n-1} - 1 \\ \therefore a_n &= 2^{n-1} - (-1)^n \end{aligned}$$

この式は $n = 1$ でも成立する.

$$(4) \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2^{n-1} + (-1)^{n-1}}{2^n - (-1)^{n-1}} = \frac{1 + (-\frac{1}{2})^{n-1}}{2 - (-\frac{1}{2})^{n-1}} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (n \rightarrow \infty)$$

より, 数列 $\left\{ \frac{a_n}{a_{n+1}} \right\}$ は $\frac{1}{2}$ に収束する.

[3]

- (1) 正の実数 a を用いて $O(0, 0)$, $A(3a, 0)$, $B(3a, 3a)$, $C(0, 3a)$ となるように座標軸を取ると, $P(2a, a)$ なので

$$\cos \alpha = \frac{2a}{\sqrt{(2a)^2 + a^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

また, 明らかに $\beta = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$ なので

$$\cos \beta = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{4}{5}$$

- (2) (証明)

$$\cos \alpha - \cos \frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{80} - \sqrt{75}}{10} > 0$$

$$\cos \frac{\pi}{6} - \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{4}{5} = \frac{\sqrt{75} - \sqrt{64}}{10} > 0$$

以上より

$$\cos \beta < \cos \frac{\pi}{6} < \cos \alpha$$

ここで, $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$, また関数 $\cos x$ は区間 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ で単調減少なので

$$\alpha < \frac{\pi}{6} < \beta$$

(証明終)

- (3) $R(x, 3a - x)$ とすると, $\angle AOR = 2\alpha$ なので

$$|\overrightarrow{OR}| = \sqrt{x^2 + (3a - x)^2} = \sqrt{2x^2 - 6ax + 9a^2}$$

より

$$\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OR}| |\overrightarrow{OA}| \cos 2\alpha$$

$$3ax = \frac{9}{5}a\sqrt{2x^2 - 6ax + 9a^2}$$

$$(7x - 9a)(x - 9a) = 0$$

$$x = \frac{9}{7}a, 9a$$

ここで, 点 R は線分 PQ 上にあることから $a \leq x \leq 2a$ なので

$$x = \frac{9}{7}a$$

したがって

$$AR : RC = 4 : 3$$

[4]

$R = |r_1 - r_2|$, $W = |w_1 - w_2|$ と書くことにする. まず R について, r_1, r_2 の組み合わせが ${}_nC_2$ 通りあり, それらが起こる確率は全て同様に確からしい. また, $R = m \geq 0$ となる組み合わせは $n - m$ 通りなので, その確率は

$$\frac{n - m}{{}_nC_2} = \frac{2(n - m)}{n(n - 1)}$$

となる. これは w_1, w_2 の組み合わせについても同様のことが言える.

- (1) A の面積が 4 になるのは $(R, W) = (1, 4), (2, 2), (4, 1)$ の場合だけなので, その確率は

$$\frac{2(n - 1)}{n(n - 1)} \cdot \frac{2(n - 4)}{n(n - 1)} + \frac{2(n - 2)}{n(n - 1)} \cdot \frac{2(n - 2)}{n(n - 1)} + \frac{2(n - 4)}{n(n - 1)} \cdot \frac{2(n - 1)}{n(n - 1)} = \frac{4(3n^2 - 14n + 12)}{n^2(n - 1)^2}$$

- (2) R の期待値 $E(R)$ は

$$\begin{aligned} E(R) &= \sum_{m=0}^{n-1} \frac{2m(n - m)}{n(n - 1)} \\ &= \frac{2}{n(n - 1)} \left(n \sum_{m=0}^{n-1} m - \sum_{m=0}^{n-1} m^2 \right) \\ &= \frac{2}{n(n - 1)} \left(\frac{n^2(n - 1)}{2} - \frac{n(n - 1)(2n - 1)}{6} \right) \\ &= \frac{n + 1}{3} \end{aligned}$$

- (3) (2) において, W の期待値 $E(W)$ についても全く同じ計算ができるので $E(W) = \frac{n+1}{3}$ である.

また, 赤い袋から取り出す事象と白い袋から取り出す事象は互いに独立なので, A の面積の期待値 $E(RW)$ は

$$E(RW) = E(R)E(W) = \left(\frac{n + 1}{3} \right)^2$$

ここで $n = 7$ より

$$E(RW) = \frac{64}{9}$$

[5]

$$(1) \quad f(-x) = -x + \frac{-x}{(-x)^2 - 1} = -\left(x + \frac{x}{x^2 - 1}\right) = -f(x)$$

より, $f(x)$ は奇関数なので $x \geq 0$ の範囲を考える.

$$f'(x) = 1 + \frac{x^2 - 1 - x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$$

なので, $f'(x) = 0$ となる x は $x = 0, \sqrt{3}$. ここで

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = -\infty$$

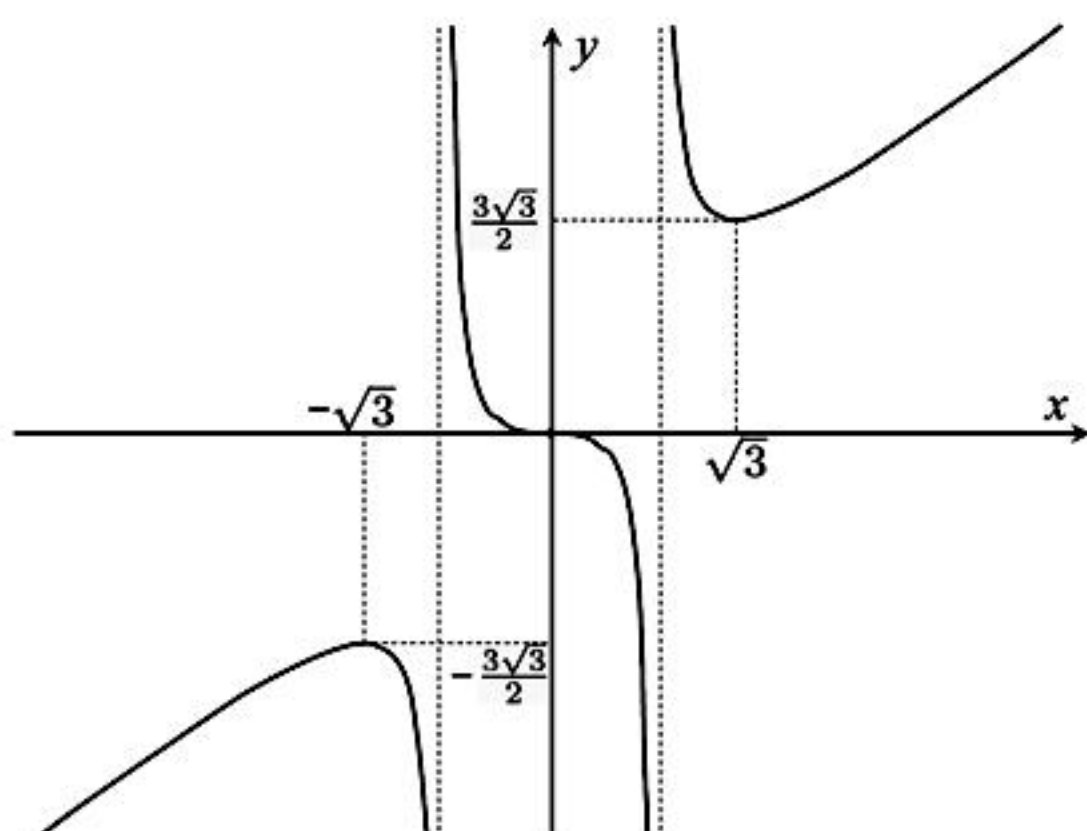
$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1 - \frac{1}{x^2}} = \infty$$

より

x	0	...	1	...	$\sqrt{3}$	...	∞
$f'(x)$	0	-	/	-	0	+	
$f(x)$	0	\	/	\	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	/	∞

$x \leq 0$ の部分は $x \geq 0$ の部分と原点を中心に点対称になるので, 増減表から, $y = f(x)$ のグラフは次のようになることが分かる.



(2) $y = f(x)$ と $y = mx$ の交点の x 座標は $f(x) = mx$ の解に等しいので

$$\begin{aligned} x + \frac{x}{x^2 - 1} &= mx \\ (1 - m)x(x^2 - 1) + x &= 0 \\ x((1 - m)x^2 + m) &= 0 \end{aligned}$$

この方程式は常に $x = 0$ の解を持つ. また, $m = 1$ の場合は他に解を持たず題意を満たさないので $m \neq 1$ とできる. このことから,

$$x^2 = \frac{m}{m - 1}$$

この方程式が異なる 2 つの実数解を持てばよいので,

$$\begin{aligned} \frac{m}{m - 1} &> 0 \\ m(m - 1) &> 0 \\ m < 0 \quad , \quad 1 < m \end{aligned}$$

(3) $m < 0$ のとき, 曲線と直線の交点の x 座標は (2) より

$$x = 0, \pm \sqrt{\frac{m}{m - 1}}$$

また, 囲まれる部分は, 原点を中心として点対称であるから, $x_1 = \sqrt{\frac{m}{m - 1}}$ とすると求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{x_1} \left(x + \frac{x}{x^2 - 1} - mx \right) dx \\ &= \int_0^{x_1} \frac{(x^2 - 1)'}{x^2 - 1} dx + (1 - m)[x^2]_0^{x_1} \\ &= [\log |x^2 - 1|]_0^{x_1} - m \\ &= -\log(1 - m) - m \end{aligned}$$