

学 力 検 査 問 題

数 学

数学 I, 数学 II

数学 A, 数学 B

平成 18 年 2 月 25 日

自 9 時 00 分

至 11 時 00 分

答案作成上の注意

- 1 この問題冊子には、数学 I, 数学 II, 数学 A, 数学 B (数列, ベクトル) の問題が 5 問あります。総ページは 11 ページで、問題は偶数ページにあります。
- 2 解答用紙は 5 枚 (表面) です。解答はすべて解答用紙の所定の解答欄に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。
- 3 受験番号 は、それぞれの解答用紙の所定の欄 (2 ヶ所) に必ず記入しなさい。
- 4 試験終了後は、解答用紙の右上の番号の順に並べなさい。
- 5 配布した解答用紙は、持ち出してはいけません。

〔 1 〕 次の問いに答えよ。

(1) $\sqrt{7}$ の小数部分を p とするとき、 $\frac{3}{p} - p$ は整数であることを示し、その整数を求めよ。

(2) $k > 0$ を定数とするとき、 x についての方程式

$$\log_3 x = kx$$

が二つの実数解 a と $3a$ をもつとする。このとき、 k の値と a の値を求めよ。

空 白

[2] $a_1 = 1$ と $a_{n+1} = 3a_n - n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) によって定義される数列 $\{a_n\}$ について、次の問いに答えよ。

(1) p と q を定数とする。数列 $\{b_n\}$ を $b_n = a_n + pn + q$ によって定めると、 $\{b_n\}$ は公比 3 の等比数列になるとする。このとき、定数 p と q の値を求めよ。

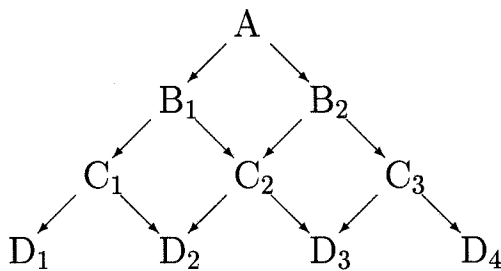
(2) a_n を n の式で表せ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の和 $\sum_{k=1}^n a_k$ を n の式で表せ。

空 白

〔 3 〕 図の一番上の点 A から玉を落とす。玉はそれぞれの分岐点において、確率 p で左下に、確率 $1 - p$ で右下に向かうものとする。また、この図の B_1, B_2 の段を 1 段目、 C_1, C_2, C_3 の段を 2 段目として段数を数えるものとする。 $0 < p < 1$ として、次の問いに答えよ。

- (1) 2 段目の点 C_1, C_2, C_3 に対して、玉がその点に落ちてくる確率を求めよ。
- (2) 2 段目の点のうち、点 C_2 に玉が落ちてくる確率が、他の点 C_1, C_3 の各点に落ちてくる確率のいずれよりも大きくなるとする。このとき、 p の値の範囲を求めよ。
- (3) 3 段目の点のうち、点 D_3 に玉が落ちてくる確率が、他の点 D_1, D_2, D_4 の各点に落ちてくる確率のいずれよりも大きくなるとする。このとき、 p の値の範囲を求めよ。



空 白

〔 4 〕 平面上で、ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ は直交し、 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = 1$ を満たすとする。線分 AB を 3 等分し、図のように、A に近い点を P、B に近い点を Q とする。また、 $\angle AOP = \alpha$ 、 $\angle POQ = \beta$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$ の値を求めよ。

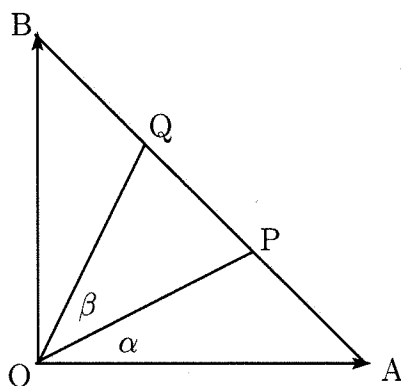
(2) $\alpha < 30^\circ < \beta$ を示せ。

(3) 線分 PQ 上に、点 R を

$$\overrightarrow{OR} = k \overrightarrow{OA} + (1 - k) \overrightarrow{OB}$$

となるようにとる。このとき、 $|\overrightarrow{OR}|^2$ を k の式で表せ。

(4) (3) の R に対して、 $\angle POR = \alpha$ となるとき、 k の値を求めよ。



空 白

〔 5 〕 直線 $y = -2x + m$ が、放物線 $y = -\frac{1}{2}x^2 + ax$ ($a > 2$) に点 $P(p, q)$ で接している。連立不等式

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq -\frac{1}{2}x^2 + ax \\ x \leq p \end{cases}$$

の表す領域の面積を S_1 とする。また、連立不等式

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + ax \leq y \leq -2x + m \\ 0 \leq x \leq p \end{cases}$$

の表す領域の面積を S_2 とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) a, m, q を p の式で表せ。

(2) S_1 と S_2 を p の式で表せ。

(3) $a > 2$ のとき、 $\frac{1}{2} < \frac{S_2}{S_1} < 2$ が成り立つことを示せ。

空 白