

[1]

(1) $x_n + y_n = 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)であることを, 数学的帰納法で示す.

(I) 仮定より $x_1 + y_1 = 1$

$$(II) \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_{n-1} + by_{n-1} \\ cx_{n-1} + dy_{n-1} \end{pmatrix} \text{より}$$

$$\begin{aligned} x_n + y_n &= (ax_{n-1} + by_{n-1}) + (cx_{n-1} + dy_{n-1}) \\ &= (a+c)x_{n-1} + (b+d)y_{n-1} \\ &= x_{n-1} + y_{n-1} \end{aligned}$$

したがって, 任意の自然数 $k \geq 2$ について,

$$x_{k-1} + y_{k-1} = 1 \text{ ならば } x_k + y_k = 1$$

(I), (II) より, 任意の自然数 n について, $x_n + y_n = 1$ が成り立つ.

$$(2) x_n = ax_{n-1} + by_{n-1}$$

$$= ax_{n-1} + b(1 - x_{n-1})$$

$$\text{よって, } x_n = (a-b)x_{n-1} + b \dots (*)$$

$$0 < a < 1, 0 < b < 1 \text{ より}$$

$$-1 < a-b < 1$$

したがって, $1-a+b \neq 0$ なので, (*) を変形して,

$$\begin{aligned} x_n - \frac{b}{1-a+b} &= (a-b) \left(x_{n-1} - \frac{b}{1-a+b} \right) \\ &= (a-b)^{n-1} \left(x_1 - \frac{b}{1-a+b} \right) \end{aligned}$$

$$\text{となるので, } x_n = (a-b)^{n-1} \left(x_1 - \frac{b}{1-a+b} \right) + \frac{b}{1-a+b}$$

(3) $-1 < a-b < 1$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} (a-b)^n = 0$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{b}{1-a+b}$$

[2]

(1) 条件より点 P は実数 t, s を用いて

$$P(2-t, 2t, 5t), P(s, -1+s, s)$$

と表せる. これらが一致することから, $t = \frac{1}{3}, s = \frac{5}{3}$

$$\text{よって, } P\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

$$(2) \quad \overrightarrow{CP} = \left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3} - c\right) \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CP} \cdot \vec{w} &= -\frac{5}{3} + 2 + \frac{5}{3} - c \\ &= 2 - c \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{CP} \perp \vec{w} \text{ より } 2 - c = 0 \quad c = 2$$

$$\text{よって } C(0, 0, 2)$$

$$(3) \quad \overrightarrow{AP} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right), \overrightarrow{AB} = (-2, -1, 0), \overrightarrow{AC} = (-2, 0, 2)$$

$$\text{より } \overrightarrow{AP} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AC} \text{ と表すことができるので,}$$

P は A, B, C の定める平面上にある.

[3]

$$(1) f(\sqrt{7}) = \frac{8\sqrt{7} + 21}{3\sqrt{7} + 8} = \frac{\sqrt{7}(8 + 3\sqrt{7})}{8 + 3\sqrt{7}} = \sqrt{7}$$

$$(2) f(x) = \frac{\frac{8}{3}(3x+8) - \frac{1}{3}}{3x+8} = \frac{8}{3} - \frac{1}{9x+24}$$

$$\geq \frac{8}{3} - \frac{1}{24} = \frac{63}{24} > 2$$

よって, $f(x) \geq 2$

$$(3) f(x) - f(y) = \frac{x-y}{(3x+8)(3y+8)} \text{ となるから}$$

$x \geq 2, y \geq 2$ のとき $3x+8 \geq 14, 3y+8 \geq 14$ であることより

$$|f(x) - f(y)| = \frac{|x-y|}{(3x+8)(3y+8)} \leq \frac{|x-y|}{14^2} \leq \frac{|x-y|}{100}$$

$$(4) 2 < \sqrt{7} < 3 \text{ より}$$

$$(3) \text{ で } y = \sqrt{7} \text{ として, } |f(x) - \sqrt{7}| \leq \frac{|x - \sqrt{7}|}{100} \dots \textcircled{1}$$

$$\text{さらに, } x \rightarrow f(x) \text{ として, } |f(f(x)) - \sqrt{7}| \leq \frac{|f(x) - \sqrt{7}|}{100} \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } |f(f(x)) - \sqrt{7}| \leq \frac{|x - \sqrt{7}|}{10000}$$

ここで $x=3$ とすると, $|3 - \sqrt{7}| < 1$ より

$$|f(f(3)) - \sqrt{7}| < 10^{-4}$$

となり, $f(f(3))$ が求める r に適する.

$$f(f(3)) = \frac{717}{271} \quad (f(f(2)) \text{ でもよい})$$

(1) $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ より $\cos \alpha, \cos \beta$ は正

$$\text{よって, } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \beta$$

同様にして, $\cos \beta = \sin \alpha$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ &= \sin^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1 \end{aligned}$$

$0 < \alpha + \beta < \pi$ より $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

(2)

$$\begin{cases} \text{A: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \dots \text{①} \\ \text{B: } \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \dots \text{②} \end{cases}$$

$0 < b < a$ であることに注意して,

$$\text{①より} \quad \frac{b^2}{a^2} x^2 + y^2 = b^2 \dots \text{①'}$$

$$\text{②より} \quad \frac{a^2}{b^2} x^2 + y^2 = a^2 \dots \text{②'}$$

$$\text{①', ②' より} \quad \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{a^2}{b^2} \right) x^2 = b^2 - a^2$$

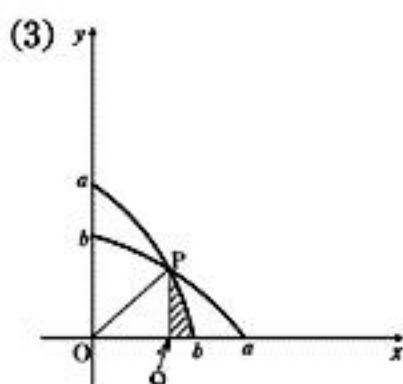
$$\frac{b^4 - a^4}{a^2 b^2} x^2 = b^2 - a^2$$

$$\frac{(b^2 - a^2)(b^2 + a^2)}{a^2 b^2} x^2 = b^2 - a^2$$

$$x^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

$$x > 0 \text{ より } x = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{同様にして, } y = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{よって, 交点の座標は } \left(\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$



(2) で求めた交点を P, P から x 軸に垂直に
下ろした足を Q とする. B 上の点は
($b \cos \theta, a \sin \theta$)

$$\text{と表すことができ, } a \sin \theta = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

すなわち $\theta = \beta$ のとき, P と一致する.

図の斜線部の面積 S_1 は

$$S_1 = \int_{\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}}^b y dx \quad \left(\frac{dx}{d\theta} = -b \sin \theta \right)$$

$$= \int_{\beta}^0 a \sin \theta \times (-b \sin \theta) d\theta$$

$$= \int_0^{\beta} ab \sin^2 \theta d\theta$$

$$= ab \int_0^{\beta} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$= ab \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\beta}$$

$$= ab \left(\frac{\beta}{2} - \frac{\sin 2\beta}{4} \right)$$

$$= \frac{1}{2} ab \beta - \frac{1}{2} ab \sin \beta \cos \beta$$

また, P ($b \cos \beta, a \sin \beta$) より

$$\triangle POQ = \frac{1}{2} ab \sin \beta \cos \beta$$

であるから,

$$\begin{aligned} S &= (S_1 + \triangle POQ) \times 2 \\ &= ab \beta \end{aligned}$$

- [5] (1) 右の表のような対応であればよく,
 $n-1$ 通り

B	C
$n+1$	1
$n+2$	2
$\vdots$	$\vdots$
$2n-1$	$n-1$

- (2) $\triangle ABC$ の辺上に O があるのは, AB 上, AC 上の $n-1$ 通りを (1) に加えて, すべてで $3(n-1)$ 通り.

$$\text{確率は } \frac{3(n-1)}{{}_{2n-1}C_2} = \frac{3}{2n-1}$$

- (3) B は n より大, C は n より小であることに注意して, B, C の対応を表にまとめると, 次のようになる.

B	C
$n+1$	2
	3
	$\vdots$
	$n-1$
$n+2$	3
	4
	$\vdots$
	$n-1$
$\vdots$	$\vdots$
$2n-1$	$n-1$

$\left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} (n-2) \text{ 通り}$
 $\left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} (n-3) \text{ 通り}$
 $\left. \begin{array}{l} \text{ } \end{array} \right\} 1 \text{ 通り}$

場合の数は

$$(n-2) + (n-3) + \dots + 2 + 1 = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

通りあり, 確率は

$$\begin{aligned} \frac{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}{{}_{2n-1}C_2} &= \frac{(n-2)(n-1)}{(2n-1)(2n-2)} \\ &= \frac{n-2}{2(2n-1)} \end{aligned}$$

- (4) (2), (3) の結果より, X の期待値は

$$\frac{3}{2n-1} + \frac{n-2}{2(2n-1)} \times 2 = \frac{n+1}{2n-1}$$