

[1]

$$(1) f'(x) = 3\sqrt{2}x^2 - 6(\sin\alpha)x$$

$$f'(x) = 0 \iff 3\sqrt{2}x(x - \sqrt{2}\sin\alpha) = 0$$

$$\iff x = 0, \sqrt{2}\sin\alpha$$

$$(2) 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ より } \sqrt{2}\sin\alpha > 0 \text{ なので,}$$

$f(x)$ は $x = 0$ で極大, $x = \sqrt{2}\sin\alpha$ で極小となる3次関数である.

したがって, 条件は

$$\begin{cases} f(0) = \sin\alpha \cos 2\alpha > 0 \dots ① \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(\sqrt{2}\sin\alpha) = -2\sin^3\alpha + \sin\alpha \cos 2\alpha < 0 \dots ② \end{cases}$$

$$\sin\alpha > 0 \text{ より } ① \iff \cos 2\alpha > 0$$

$$\iff 0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$$

$$\text{また, } ② \iff -4\sin^3\alpha + \sin\alpha < 0$$

$$\iff \sin^2\alpha > \frac{1}{4}$$

$$\iff \sin\alpha > \frac{1}{2}$$

$$\iff \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

したがって, 求める α の範囲は $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{4}$

[2]

- (1) $a(1, k)$ は左下から数えて k マスの正方形の中に含まれる自然数の個数に等しいので,

$$a(1, k) = k^2$$

$$\begin{aligned} a(j, 1) &= a(1, j-1) + 1 \\ &= (j-1)^2 + 1 \\ &= j^2 - 2j + 2 \end{aligned}$$

- (2) $j \geq k$ のとき, $a(j, k) = a(j, 1) + k - 1$
- $$\begin{aligned} &= j^2 - 2j + 2 + k - 1 \\ &= j^2 - 2j + k + 1 \dots (*) \end{aligned}$$
- $j < k$ のとき, $a(j, k) = a(1, k) - (j-1)$
- $$= k^2 - j + 1$$

- (3) $45^2 = 2025$ より $a(1, 45) = 2025$

$$\text{よって, } a(19, 45) = 2007$$

$$j = 19, k = 45$$

- (4) (2) の (*) 式で $j = k$ として $a(k, k) = k^2 - k + 1$

$$\text{よって, } \sum_{k=1}^n a(k, k) = \sum_{k=1}^n (k^2 - k + 1)$$

$$= \frac{n^3 + 2n}{3}$$

[3]

(1) 条件より実数 s, t を用いて

$$P(2-s, 2s, 5s), P(t, -1+t, t)$$

と表せる. これらが一致することから,

$$\begin{cases} 2-s=t \\ 2s=-1+t \\ 5s=t \end{cases}$$

$$\text{これを解いて, } s=\frac{1}{3}, t=\frac{5}{3}$$

$$\text{よって, } P\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

$$(2) \overrightarrow{CP} = \left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3} - c\right) \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{w} &= -\frac{5}{3} + 2 + \frac{5}{3} - c \\ &= 2 - c \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{w} = 0 \text{ より } c = 2 \quad \text{よって } C(0, 0, 2)$$

$$(3) \overrightarrow{CP} = \left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{CA} = (2, 0, -2)$$

$$\overrightarrow{CB} = (0, -1, -2) \text{ より}$$

$$\overrightarrow{CP} = \frac{5}{6} \overrightarrow{CA} - \frac{2}{3} \overrightarrow{CB}$$

と表せる.

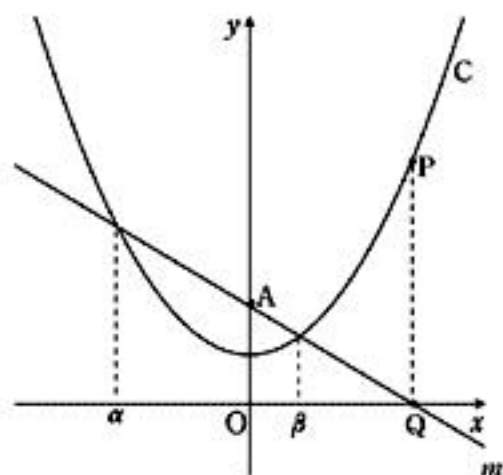
[4]

(1) $y' = x$ より l の傾きは p

よって, m の傾きは $-\frac{1}{p}$

$$m: y = -\frac{1}{p}(x - p)$$

$$y = -\frac{1}{p}x + 1$$



(2) $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$ と $y = -\frac{1}{p}x + 1$ を連立して

$$\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{p}x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{2}{p}x - 1 = 0$$

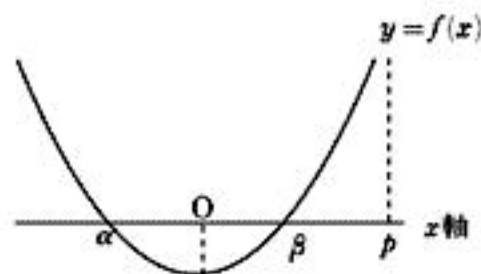
この左辺を $f(x)$ とおくと, $f(x) = 0$ の解が α, β である.

また, $f(0) = -1 < 0$, $f(p) = p^2 + 1 > 0$ より

$y = f(x)$ のグラフは右図のようになり,

$$\alpha < 0 < \beta < p$$

である.



(3) m と y 軸の交点を A とする.

$$\triangle AOQ = \frac{1}{2}p$$

C と x 軸, $x = 0$, $x = p$ で囲まれた部分の面積を S_3 とする.

$$S_3 = \int_0^p \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \right) dx = \frac{1}{6}p^3 + \frac{1}{2}p$$

$$S_2 - S_1 = S_3 - \triangle AOQ$$

$$= \left(\frac{1}{6}p^3 + \frac{1}{2}p \right) - \frac{1}{2}p$$

$$= \frac{1}{6}p^3$$

[5]

(1) 和が4になるのは, 1と3のペアか2と2のペアのときのみ.

$$\text{確率は } \frac{2(8-m) + {}_m C_2}{{}_{10} C_2} = \frac{m^2 - 5m + 32}{90}$$

(2) $S=2$ or 5 であればよい.

$$\text{確率は } \frac{1 + m(8-m)}{{}_{10} C_2} = \frac{-m^2 + 8m + 1}{45}$$

(3) 余りが1となるのは $S=4$ のときのみ.

$$\begin{aligned} E &= \frac{m^2 - 5m + 32}{90} \times 1 + \frac{-m^2 + 8m + 1}{45} \times 2 \\ &= \frac{-m^2 + 9m + 12}{30} \end{aligned}$$

$$(4) -m^2 + 9m + 12 = -\left(m - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{129}{4} \quad \text{より}$$

$m=4, 5$ のとき, E は最大となり,

$$\text{そのとき, } E = \frac{16}{15}$$