

学 力 検 査 問 題

数 学

数学 I, 数学 II, 数学 III
数学 A, 数学 B, 数学 C

平成 19 年 2 月 25 日

自 9 時 00 分

至 11 時 30 分

答案作成上の注意

- 1 この問題冊子には、数学 I, 数学 II, 数学 III, 数学 A, 数学 B (数列, ベクトル), 数学 C (行列とその応用, 式と曲線) の問題が 5 問あります。総ページは 11 ページで、問題は偶数ページにあります。
- 2 解答用紙は 5 枚 (表面) です。解答はすべて対応する番号の解答用紙の所定の解答欄に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。
- 3 受験番号 は、それぞれの解答用紙の所定の欄 (2 ヶ所) に必ず記入しなさい。
- 4 試験終了後は、解答用紙の右上の番号の順に並べなさい。
- 5 配付した解答用紙は、持ち出してはいけません。

[1] a, b, c, d は $a + c = b + d = 1$ を満たす正の定数とし, 行列

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える。さらに, $x_1 + y_1 = 1$ を満たす実数 x_1, y_1

に対し, x_n, y_n ($n = 2, 3, 4, \dots$) を漸化式

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

によって帰納的に定める。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) $x_n + y_n = 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) であることを示せ。
- (2) x_n をまず a, b, x_{n-1} で表し, 次に a, b, x_1 で表せ。
※ x_n を表すとき, 必要ならば n も使ってよい。
- (3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ を求めよ。

空 白

〔 2 〕 座標空間の 2 点 $A(2, 0, 0)$, $B(0, -1, 0)$ および

$$\vec{u} = (-1, 2, 5), \quad \vec{v} = (1, 1, 1), \quad \vec{w} = (-1, 3, 1)$$

と成分表示される 3 つのベクトルがある。次の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{AP}$ と $\vec{u}$ が平行かつ $\overrightarrow{BP}$ と $\vec{v}$ が平行となるような点 P の座標を求めよ。
- (2) 上で求めた点 P に対し、 $\overrightarrow{CP}$ と $\vec{w}$ が直交するような点 $C(0, 0, c)$ を求めよ。
- (3) 上で求めた点 P と C に対し、 P は 3 点 A, B, C の定める平面上にあることを示せ。

空 白

[3] $f(x) = \frac{8x+21}{3x+8}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) $f(\sqrt{7}) = \sqrt{7}$ であることを示せ。

(2) $x \geq 0$ ならば $f(x) \geq 2$ であることを示せ。

(3) $x \geq 2, y \geq 2$ ならば

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{100}$$

となることを示せ。

(4) $x \geq 2$ ならば

$$|f(f(x)) - \sqrt{7}| \leq \frac{|x - \sqrt{7}|}{10000}$$

となることを示し、これを用いて $|r - \sqrt{7}| < 10^{-4}$ を満たす有理数 r を 1 つ求めよ。

空 白

[4] $0 < b < a$ を満たす定数 a, b に対し, 2 つの楕円

$$A: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad B: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

を考える。また α, β は

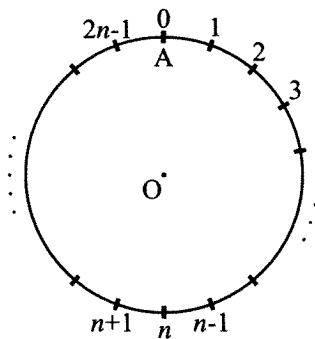
$$\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

を満たす 0 と $\frac{\pi}{2}$ の間の実数とする。次の問いに答えよ。

- (1) $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ を示せ。
- (2) 2 つの楕円 A, B の第 1 象限にある交点の座標を求めよ。
- (3) 楕円 A で囲まれる図形と楕円 B で囲まれる図形の共通部分のうち,
 $x \geq 0, y \geq 0$ の範囲にある部分の面積 S を a, b, β を用いて表せ。

空 白

〔5〕 n を 2 以上の整数とする。中心を O とする円の周を $2n$ 等分して、図のように 0 から $2n-1$ までの目盛りを付ける。目盛りが 0 の点を A とする。一方、袋の中に 1 から $2n-1$ までの整数を書いた玉がそれぞれ 1 個ずつ入っている。この袋から玉を 2 つ取り出して、玉に書かれた数と同じ目盛りを持つ 2 点をとる。2 点のうち、目盛りの大きい方を B 、目盛りの小さい方を C として、 $\triangle ABC$ を考える。次の問いに答えよ。



- (1) 辺 BC 上に点 O がある場合は何通りあるか。
- (2) $\triangle ABC$ の辺上に点 O がある確率を求めよ。
- (3) $\triangle ABC$ の内部に点 O がある確率は $\frac{n-2}{2(2n-1)}$ であることを示せ。
- (4) $\triangle ABC$ の辺上に点 O があるとき $X = 1$, $\triangle ABC$ の内部に点 O があるとき $X = 2$, それ以外のとき $X = 0$ とする。 X の期待値を求めよ。

空 白