

[1]

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) $A^3 = O \Rightarrow A = O$ ①は偽

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -a^2 & -a \end{pmatrix} \text{ はケーリー・ハミルトンの定理より, } A^2 = O \text{ であるから,}$$

両辺に左から A をかけて $A^3 = O$ であるが, $A \neq O$ であるから①の反例であり, ①は偽である.

$$A = O \Rightarrow A^2 = O \text{②は真}$$

両辺に左から A をかければ示せる.

(2) 背理法で示す.

$A^3 = O$ かつ A は逆行列をもつとすると,

$A^3 = O$ の左から $(A^{-1})^3$ をかけると, $E = O$ となり矛盾する.

ゆえに, A は逆行列をもたない.

(3) (2) より, $A^3 = O$ ならば A は逆行列をもたないから,

$$\det A = ad - bc = 0$$

である. ケーリー・ハミルトンの定理より,

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$$

$$A^2 - (a+d)A = O \text{③}$$

③の両辺の左から A をかけて③を再び用いると,

$$A^3 - (a+d)^2 A = O$$

$A^3 = O$ であるから,

$$(a+d)^2 A = O \iff a+d=0 \text{ または } A=O$$

$a+d=0$ のとき, ③より $A^2 = O$, $A=O$ のとき, $A^2 = O$ であるから,

$A^3 = O$ ならば $A^2 = O$ が示された.

[2]

(1) $0 < x \leq 1$ とする.

関数 $y = \log x$ は区間 $\left[1, 1 + \frac{x}{n}\right]$ で微分可能であるから,

(ラグランジュの) 平均値の定理より,

$$\frac{\log\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \log 1}{\left(1 + \frac{x}{n}\right) - 1} = \frac{1}{c}, \quad 1 < c < 1 + \frac{x}{n}$$

を満たす実数 c が存在する.

$$\log\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \underbrace{\frac{1}{c}}_{(\cdots\cdots\textcircled{1})} \cdot \underbrace{\frac{x}{n}}_{(\cdots\cdots\textcircled{2})}, \quad 1 < c < 1 + \frac{x}{n}$$

関数 $y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) は単調減少関数であるから, ②より,

$$\frac{1}{1 + \frac{x}{n}} < \frac{1}{c} < 1 \quad \cdots\cdots\textcircled{2}'$$

$\frac{x}{n} > 0$ と ①, ②' より,

$$\frac{x}{n+x} = \frac{\frac{x}{n}}{1 + \frac{x}{n}} < \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) < \frac{x}{n} \quad \cdots\cdots\textcircled{3}$$

$0 < x \leq 1$ であるから, $n+1 \geq n+x > 0 \iff 0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n+x}$ より,

$$\frac{x}{n+1} \leq \frac{x}{n+x} \quad \cdots\cdots\textcircled{4}$$

③, ④より,

$$\frac{x}{n+1} < \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) < \frac{x}{n}$$

が成り立つ.

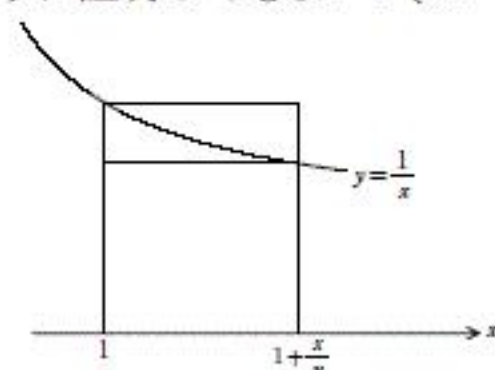
$x=0$ のとき, $\frac{x}{n+1} = \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n} = 0$ であるから, 以上と合わせて

$0 \leq x \leq 1$ を満たす実数 x に対して, 不等式

$$\frac{x}{n+1} \leq \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq \frac{x}{n} \text{ が成り立つ.}$$

[補足]

③は次のように証明してもよい. ($x > 0$ のとき)



関数 $y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) は単調減少関数であるから, 上の図より,

$$\frac{x}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{n}} < \int_1^{1 + \frac{x}{n}} \frac{1}{t} dt < \frac{x}{n}$$

$$\iff \frac{x}{n+x} = \frac{\frac{x}{n}}{1 + \frac{x}{n}} < \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) < \frac{x}{n} \quad \cdots\cdots\textcircled{3}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^5 &= \int_0^1 x^5 dx \\ &= \left[\frac{1}{6} x^6\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

である.

$$\begin{aligned} (3) \quad a_n &= \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k^5}{n^6}\right) \left(\text{ただし, } \prod_{k=1}^n a_k \text{ は積 } a_1 a_2 \cdots a_n \text{ を表す. } \Pi \text{ は } \pi \text{ の大文字} \right) \\ \log a_n &= \log \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k^5}{n^6}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \log \left\{ 1 + \frac{1}{n} \left(\frac{k}{n}\right)^5 \right\} \end{aligned}$$

$k=1, 2, \dots, n$ に対して, $0 \leq \frac{k}{n} \leq 1 \iff 0 \leq \left(\frac{k}{n}\right)^5 \leq 1$ であるから,

(1) の不等式において $x = \left(\frac{k}{n}\right)^5$ とおくと,

$$\frac{1}{n+1} \left(\frac{k}{n}\right)^5 \leq \log \left\{ 1 + \frac{1}{n} \left(\frac{k}{n}\right)^5 \right\} \leq \frac{1}{n} \left(\frac{k}{n}\right)^5 \quad \cdots\cdots\textcircled{5}$$

$k=1, 2, \dots, n$ に対して, ⑤の和をとると,

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^5 \leq \log a_n \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \left(\frac{k}{n}\right)^5$$

(2) より,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^5 &= \frac{1}{6} \\ \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^5 &= \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^5, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \text{ より,} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^5 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^5 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

であるから, はさみうちの定理 (あるいは原理) により, 数列 $\{\log a_n\}$ も

収束して, $\lim_{n \rightarrow \infty} \log a_n = \frac{1}{6}$

である.

関数 $y = e^x$ は連続関数であるから,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\log a_n} \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \log a_n} \\ &= e^{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

である.

[補足]

(1) は差をとって微分法により示してももちろんよい.

(3) の最後の部分は

「関数 $y = \log x$ の中への 1 対 1 の連続関数であるから, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{\frac{1}{6}}$ 」

と説明してもよい.

ちなみに,

集合 A から集合 B への写像 f が中への 1 対 1 の写像 (単射ともいう)

であるとは, $i, j \in A$ に対して,

$$i \neq j \iff f(i) \neq f(j)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{あるいは, 対偶をとって} \\ f(i) = f(j) \implies i = j \end{array} \right)$$

が成り立つことである.

[3]

(1) 時刻 $t=0$ で石は点 A にあるから, $p_0=1$ よって,

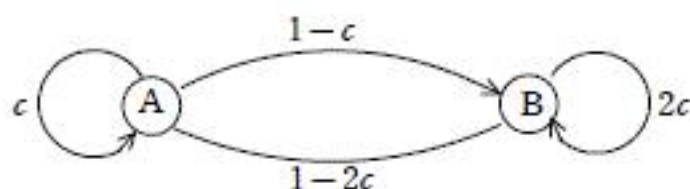
$$p_1 = (3c-1)p_0 + (1-2c) = (3c-1) + (1-2c) = c$$

$$\begin{aligned} p_2 &= (3c-1)p_1 + (1-2c) \\ &= (3c-1)c + (1-2c) \\ &= 3c^2 - 3c + 1 \end{aligned}$$

である.

(2) n を非負整数とし, $n=0$ も含める.

推移確率を図で表すと, 次のようになる.



$$\left(0 < c < \frac{1}{2}\right)$$

したがって,

時刻 $t=n+1$ に石が点 A にある場合には

「時刻 $t=n$ に石が点 A にあり, 時刻 $t=n \rightarrow t=n+1$ で $A \rightarrow A$ と移動する」
.....①

あるいは

「時刻 $t=n$ に石が点 B にあり, 時刻 $t=n \rightarrow t=n+1$ で $B \rightarrow A$ と移動する」
.....②

があり, 事象①, ②は排反である.

また, 石は点 A あるいは点 B のどちらかにあるから,

時刻 $t=n$ において石が点 B にある確率は $1-p_n$ である.

以上より,

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= cp_n + (1-2c)(1-p_n) \\ &= (3c-1)p_n + (1-2c) \quad (n=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad \text{.....③}$$

である.

(3) $3c-2 \neq 0$ であるから, ③より,

$$p_{n+1} - \frac{2c-1}{3c-2} = (3c-1) \left(p_n - \frac{2c-1}{3c-2} \right) \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

数列 $\left\{ p_n - \frac{2c-1}{3c-2} \right\}$ は, 初項 $p_0 - \frac{2c-1}{3c-2} = \frac{c-1}{3c-2}$, 公比 $3c-1$ の等比数列であるから,

$$\begin{aligned} p_n - \frac{2c-1}{3c-2} &= \frac{c-1}{3c-2} (3c-1)^n \\ \therefore p_n &= \frac{c-1}{3c-2} (3c-1)^n + \frac{2c-1}{3c-2} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

である.

(4) $0 < c < \frac{1}{2}$ より, $-1 < 3c-1 < \frac{1}{2}$ であるから, $\lim_{n \rightarrow \infty} (3c-1)^n = 0$

ゆえに

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} p_n &= \frac{c-1}{3c-2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (3c-1)^n + \frac{2c-1}{3c-2} \\ &= \frac{2c-1}{3c-2} \end{aligned}$$

である.

[4]

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 120^\circ = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$\begin{aligned} (1) \quad |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) \\ &= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 2 + 2 \times (-1) + 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

である。

(2) k, l を整数とする。

$$\begin{aligned} |k\vec{a} + l\vec{b}|^2 &= k^2 |\vec{a}|^2 + 2kl\vec{a} \cdot \vec{b} + l^2 |\vec{b}|^2 \\ &= 2k^2 - 2kl + 2l^2 \\ &= 2(k^2 - kl + l^2) \end{aligned}$$

$k^2 - kl + l^2$ は整数であるから、 $|k\vec{a} + l\vec{b}|^2$ は偶数である。

$$(3) \quad k^2 - kl + l^2 = (k+l)^2 - 3kl = A(k, l)$$

とおく。 $A(k, l)$ が k, l の対称式であることを考慮すると、

k が奇数のとき、 $A(k, l)$ が奇数

が示されればよい。

(i) k : 奇数, l : 偶数 $\Rightarrow k+l$: 奇数, kl : 偶数

$$\Rightarrow (k+l)^2: \text{奇数}, 3kl: \text{偶数}$$

$$\Rightarrow A(k, l): \text{奇数}$$

(ii) k : 奇数, l : 奇数 $\Rightarrow k+l$: 偶数, kl : 奇数

$$\Rightarrow (k+l)^2: \text{偶数}, 3kl: \text{奇数}$$

$$\Rightarrow A(k, l): \text{奇数}$$

ゆえに、題意は示された。

(4) m, n を整数とする。

「 $m=n=0$ ではないならば、 $|m\vec{a} + n\vec{b}|$ は整数でない」

の対偶

「 $|m\vec{a} + n\vec{b}|$ は整数である $\Rightarrow m=n=0$ 」

を証明する。

$|m\vec{a} + n\vec{b}| = p$ が整数ならば、

(2) より、 $|m\vec{a} + n\vec{b}|^2 = p^2$ は偶数であるから、 p は偶数である。

p' を整数として、 $p = 2p'$ とおくと、 $|m\vec{a} + n\vec{b}|^2 = 4p'^2$

すなわち、 $|m\vec{a} + n\vec{b}|^2$ は 4 の倍数である。

(3) の対偶をとると、

$|m\vec{a} + n\vec{b}|^2$ が 4 の倍数ならば、 m, n はともに偶数である。

m', n' を整数として、 $m = 2m', n = 2n'$ とおくと、

$$|m'\vec{a} + n'\vec{b}|^2 = p'^2$$

(m, n, p) を (m', n', p') として同じ議論を限りなく続けることができ、

m, n は 2 で何度も割れるが、このような整数は 0 以外には存在しない。

ゆえに、 $m=n=0$ であり、題意は証明された。

[別解]

「 $|m\vec{a} + n\vec{b}|$ は整数である $\Rightarrow m=n=0$ 」

を証明する。

p を整数として、 $|m\vec{a} + n\vec{b}| = p$ とおき、

m, n, p の不定方程式

$$|m\vec{a} + n\vec{b}|^2 = p^2 \iff 2(m^2 - mn + n^2) = p^2 \quad \dots\dots ①$$

の整数解を考える。

①にすべてが 0 でない解 (m_0, n_0, p_0) が存在したとする。

m_0, n_0, p_0 の最大公約数 $\gcd(m_0, n_0, p_0) = d$ とすると、

$m_0 = dm_1, n_0 = dn_1, p_0 = dp_1$ とおき、 $\gcd(m_1, n_1, p_1) = 1$ である。

①に代入すると、

$$|m_0\vec{a} + n_0\vec{b}|^2 = p_0^2 \iff |m_1\vec{a} + n_1\vec{b}|^2 = p_1^2$$

となるから、すべて 0 でない解が存在すれば、その中に最大公約数が 1 となる解が存在する。

そのような解を改めて (m_1, n_1, p_1) とする。

$$\begin{cases} |m_1\vec{a} + n_1\vec{b}|^2 = p_1^2 & \dots\dots ② \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gcd(m_1, n_1, p_1) = 1 & \dots\dots ③ \end{cases}$$

(2) より、②の値は偶数であるから、 p_1 は偶数であり、 p_1' を整数として、

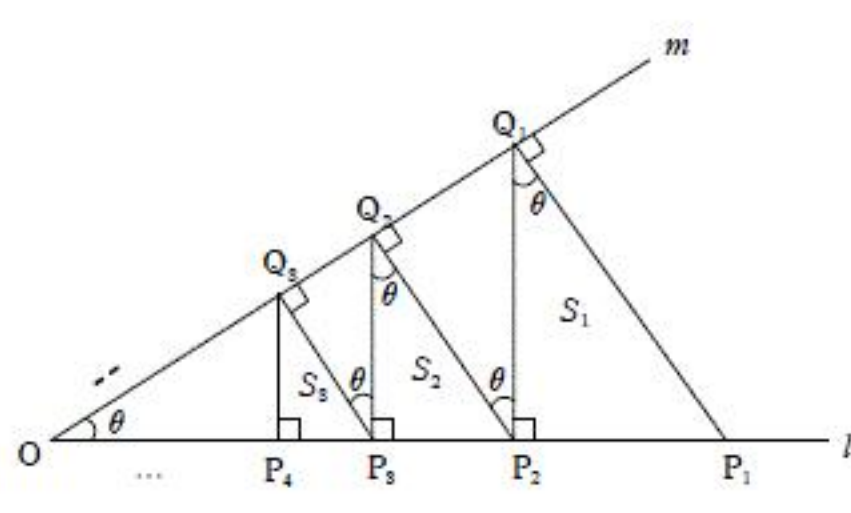
$$p_1 = 2p_1' \text{ とおけて、}$$

$$② \iff |m_1\vec{a} + n_1\vec{b}|^2 = 4p_1'^2 \dots\dots ②'$$

②' から $|m_1\vec{a} + n_1\vec{b}|^2$ は 4 の倍数であるから、

(3) の対偶をとると、 m_1, n_1 はともに偶数となり、 m_1, n_1, p_1 の正の公約数 2 が存在して、③に反する。

ゆえに、①の整数解は $(m, n, p) = (0, 0, 0)$ のみであり、題意は示された。



$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}, OP_1 = 1, S_n = \triangle P_n Q_n P_{n+1}$$

(1) $\triangle P_1 O Q_1 \sim \triangle P_1 Q_1 P_2 \sim \triangle Q_1 P_2 Q_2$ であるから

$$\frac{Q_1 P_2}{P_1 Q_1} = \frac{Q_2 P_2}{Q_1 P_2} = \frac{O Q_1}{P_1 O} = \cos \theta$$

よって, $P_2 Q_2 = Q_1 P_2 \cos \theta = P_1 Q_1 \cos^2 \theta$ であるから,

$$\frac{Q_2 P_2}{P_1 Q_1} = \cos^2 \theta$$

である.

(2) $P_1 Q_1 P_2 \sim \triangle P_2 Q_2 P_3$ であり, 相似比は

$$P_1 Q_1 : P_2 Q_2 = 1 : \cos^2 \theta$$

であるから, 面積の比は

$$S_1 : S_2 = 1 : \cos^4 \theta$$

すなわち

$$\frac{S_2}{S_1} = \cos^4 \theta$$

である.

(3) $\triangle P_n Q_n P_{n+1} \sim \triangle P_{n+1} Q_{n+1} P_{n+2}$ ($n=1, 2, \dots$) であり,

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \cos^4 \theta \quad (n=1, 2, \dots)$$

である. したがって, $S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n$ は

初項 S_1 , 公比 $\cos^4 \theta$ の無限等比級数

であり, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より, $0 < \cos^4 \theta < 1$ であるから収束し, その和は

$$S = \frac{S_1}{1 - \cos^4 \theta}$$

である.

$$\begin{aligned} S_1 &= \left(\frac{P_1 Q_1}{O P_1} \right)^2 \triangle O P_1 Q_1 \\ &= \sin^2 \theta \cdot \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta \\ &= \sin^2 \theta \cdot \frac{1}{4} \sin 2\theta \end{aligned}$$

$$1 - \cos^4 \theta = (1 - \cos^2 \theta)(1 + \cos^2 \theta)$$

$$= \sin^2 \theta \left(1 + \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right)$$

$$= \sin^2 \theta \cdot \frac{1}{2} (3 + \cos 2\theta)$$

より,

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta + 3}$$

である.

(4) $S = \frac{1}{2} f(\theta)$ とおく.

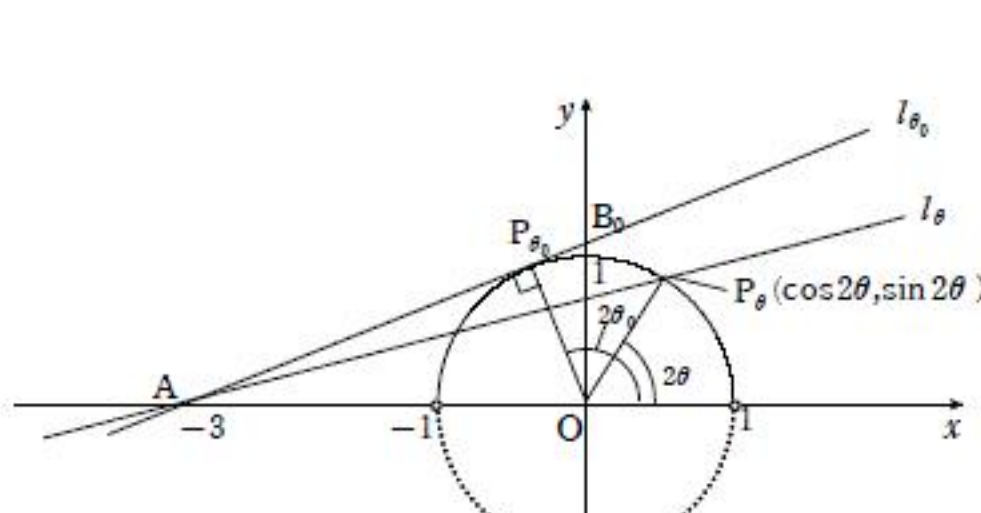
$$f(\theta) = \frac{\sin 2\theta - 0}{\cos 2\theta - (-3)}$$

であるから, $f(\theta)$ は

定点 $A(-3, 0)$ と単位円上の点 $P_\theta(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) を通る

直線 l の傾き

である.



$f(\theta)$ が最大となるのは, 上の図のように l_θ が単位円に接するときで,

このときの l_θ を l_{θ_0} , 接点を P_{θ_0} , y 切片を B_0 とおくと,

$$P_{\theta_0} O : O A : A P_{\theta_0} = 1 : 3 : 2\sqrt{2}$$

$\triangle O A P_{\theta_0} \sim \triangle B_0 A O$ より,

$$A O : O B_0 = A P_{\theta_0} : P_{\theta_0} O = 2\sqrt{2} : 1$$

したがって,

$$f(\theta) \text{ は } \theta = \theta_0 \text{ のとき, 最大値 } \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ をとる.}$$

ゆえに, S の最大値は, $\frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}$ である.

[別解 1]

$S = \frac{1}{2} f(\theta)$ とおくと, $f(\theta) > 0$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) である.

$\tan \theta = t$ とおくと, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より, $t > 0$ であり,

$$\cos 2\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin 2\theta = \frac{2t}{1+t^2}$$

であるから, $\frac{1}{f(\theta)}$ を考えると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(\theta)} &= \frac{\cos 2\theta + 3}{\sin 2\theta} \\ &= \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2} + 3}{\frac{2t}{1+t^2}} \\ &= \frac{t^2 + 2}{t} \\ &= t + \frac{2}{t} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{2}{t}} = 2\sqrt{2} \quad (\text{相加平均と相乗平均の大小関係}) \end{aligned}$$

$$\left(\text{等号成立は } t = \frac{2}{t} > 0 \iff t = \sqrt{2} \text{ のとき} \right)$$

したがって, $f(\theta) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$ で等号が成り立つ場合であるから,

$$\tan \theta = \sqrt{2} \text{ のとき, } S \text{ は最大値 } \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8} \text{ をとる.}$$

[別解 2]

方程式 $f(\theta) = k$ が $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲に実数解をもつような k の値の範囲を

求める.

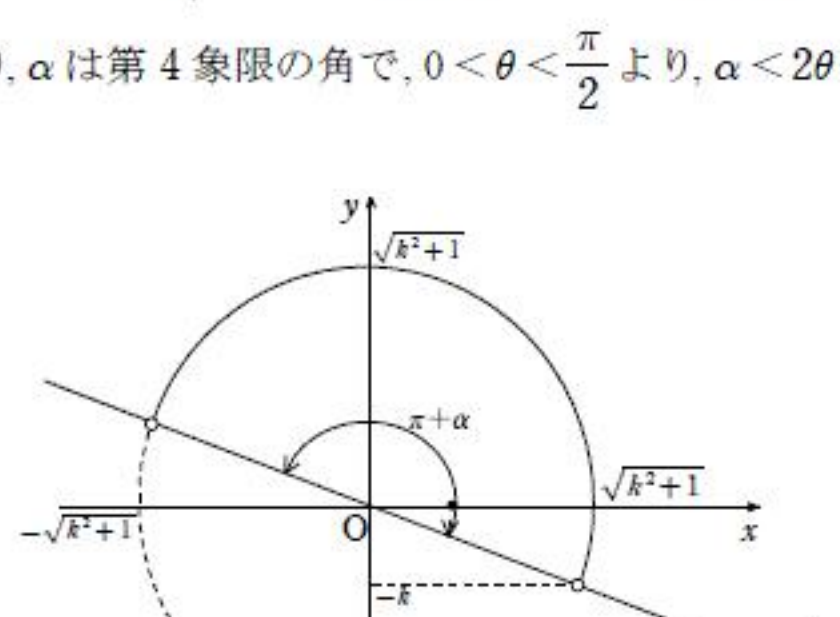
$$f(\theta) = k \iff \sin 2\theta = k(\cos 2\theta + 3)$$

$$\iff \sin 2\theta - k \cos 2\theta = 3k$$

$$\iff \sqrt{k^2 + 1} \sin(2\theta + \alpha) = 3k$$

$$\left(\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}}, \sin \alpha = \frac{-k}{\sqrt{k^2 + 1}}, \tan \alpha = -k \right)$$

$k > 0$ より, α は第 4 象限の角で, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より, $\alpha < 2\theta + \alpha < \pi + \alpha$ である.



上の図より, 求める k の条件は

$$-k < 3k \leq \sqrt{k^2 + 1} \iff 0 < k \text{ かつ } 9k^2 \leq k^2 + 1$$

$$\iff 0 < k \text{ かつ } k^2 \leq \frac{1}{8}$$

$$\iff 0 < k \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

したがって, S のとりうる値の範囲は, $0 < S \leq \frac{1}{4\sqrt{2}}$ であるから,

$$S \text{ は最大値 } \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8} \text{ をとる.}$$

[補足]

$\frac{dS}{d\theta}$ により, S の θ に対する増減を調べるという方法もよいが, ここでは

敢えて別の方法を紹介した.