

学 力 検 査 問 題

数 学

数学 I, 数学 II

数学 A, 数学 B

平成 20 年 2 月 25 日

自 9 時 00 分

至 11 時 00 分

答案作成上の注意

- 1 この問題冊子には、数学 I, 数学 II, 数学 A, 数学 B (数列, ベクトル) の問題が**5 問**あります。総ページは **11 ページ** で、問題は偶数ページにあります。
- 2 解答用紙は **5 枚** (表面) です。解答はすべて**対応する番号の解答用紙**の所定の**解答欄**に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。
- 3 **受験番号** は、それぞれの解答用紙の所定の欄 (**2 ヶ所**) に必ず記入しなさい。
- 4 試験終了後は、**解答用紙の右上の番号の順**に並べなさい。
- 5 配付した解答用紙は、持ち出してはいけません。

〔 1 〕 3 次関数

$$y = x^3 - cx$$

のグラフを考える。ただし、 c は定数とする。そして、2 点 P, Q が、次の条件を満たしながら、このグラフ上全体を動くものとする。

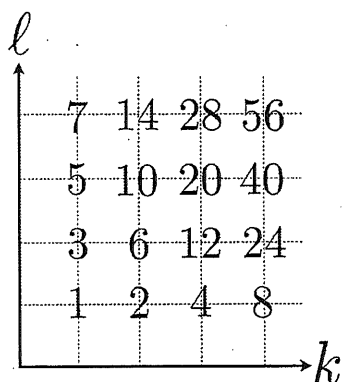
(条件) P の x 座標は Q の x 座標より 1 だけ小さい。

このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 線分 PQ の傾きが最小になるときの点 P の x 座標と、傾きの最小値を求めよ。
- (2) 線分 PQ の傾きが 0 となる点 P が存在するような、 c の値の範囲を求めよ。
- (3) 線分 PQ の中点の x 座標と同じ x 座標をもつグラフ上の点を R とする。点 R におけるグラフの接線の傾きは、線分 PQ の傾きより常に小さいことを示せ。

〔2〕 k, ℓ を自然数とし、座標平面上の点 (k, ℓ) に数 $2^{k-1}(2\ell-1)$ を記入する
(下図を参照)。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 点 $(2, 25)$ に記入される数を求めよ。
- (2) 2008 が記入される点の座標を求めよ。
- (3) どの自然数も座標平面上のどこかの点に 1 回だけ記入される。その理由を書け。



〔3〕 2点 A, B と, その上を動く 1 個の石を考える。この石は, 時刻 $t=0$ で点 A にあり, その後, 次の規則 (a), (b) にしたがって動く。

各 $t=0, 1, 2, \dots$ に対して,

(a) 時刻 t に石が点 A にあれば, 時刻 $t+1$ に石が点 A にある確率は $\frac{1}{3}$,
点 B にある確率は $\frac{2}{3}$ である。

(b) 時刻 t に石が点 B にあれば, 時刻 $t+1$ に石が点 B にある確率は $\frac{1}{3}$,
点 A にある確率は $\frac{2}{3}$ である。

いま, n を自然数とし, 時刻 $t=n$ において石が点 A にある確率を p_n とするとき, 次の問いに答えよ。

(1) p_1 を求めよ。

(2) p_{n+1} を p_n を用いて表せ。

(3) p_n を求めよ。

〔4〕 $x_1 = x_2 = 1$ とし、 x_n ($n = 3, 4, \dots$) は x_{n-2} と x_{n-1} の和を 3 で割ったときの余りであるとして、数列 $\{x_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) を定める。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{x_n\}$ の第 3 項から第 12 項までのそれぞれの値を、解答用紙にある表の中に書け。

(2) x_{346} を求めよ。

(3) $S_m = \sum_{n=1}^m x_n$ とおくとき、 $S_m \geq 684$ を満たす最小の自然数 m を求めよ。

[5] 三角形 OAB において、OA を $t : (1 - t)$ に内分する点を M, OB を $t : (1 - t)$ に内分する点を N とする。ただし、 t は $0 < t < 1$ の範囲を動く。そして、線分 AN と BM の交点を P とするとき、次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{MN}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ および t を用いて表し、 $\overrightarrow{MN}$ と $\overrightarrow{AB}$ が平行であることを示せ。

(2) $s = \frac{BM}{BP}$ とするとき、 s を t を用いて表し、 s のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) 三角形 AMP と 三角形 OAB の面積比 $r = \frac{\triangle AMP}{\triangle OAB}$ を (2) の s を用いて表し、 r の最大値を求めよ。