

[1]

(1) 偽

(反例)

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \iff AB = BA$$

一般に、2行2列の行列 A, B に対し、 $A \neq kE$ ならば

$$AB = BA \iff B = pA + qE \quad (k, p, q \text{ は実数})$$

が成り立つ。よって、これが成り立たないように、たとえば

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とすれば、 $AB \neq BA$ である。

(2) 偽

(反例)

$$A^2 = E \text{ を解く。両辺の行列式をとることにより, } \det A = \pm 1$$

(i) $\det A = 1$ のとき

$$\text{ケーリー・ハミルトンの定理より, } (tr A)A = A^2 + E = 2E \quad \dots\dots ①$$

$$\text{両辺のトレースをとって } (tr A)^2 = 4 \quad \therefore tr A = \pm 2$$

$$① \text{ に代入して } A = \pm E$$

このとき、 $A^2 = E$ を満たす。

(ii) $\det A = -1$ のとき

$$\text{ケーリー・ハミルトンの定理より, } (tr A)A = O \quad (O: \text{零行列})$$

$$tr A = 0 \text{ または } A = O \iff tr A = 0$$

$$\text{このとき, } A^2 - (tr A)A + (\det A)E = O \text{ より, } A^2 = E \text{ を満たす。}$$

ゆえに、 $tr A = 0$ かつ $\det A = -1$ を満たす、 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ は反例である。

(3) 偽

(反例)

$$\text{関数 } f(x) = 2 \int_0^x |t| dt = \begin{cases} -x^2 & (x \leq 0) \\ x^2 & (x \geq 0) \end{cases} \text{ に対して,}$$

$$f'(x) = 2|x| \text{ であるから, } f'(x) = 0 \text{ だが,}$$

$x=0$ の前後で $f'(x)$ の符号が変化しないから、 $x=0$ で極値をとらない。

(4) 真

(証明)

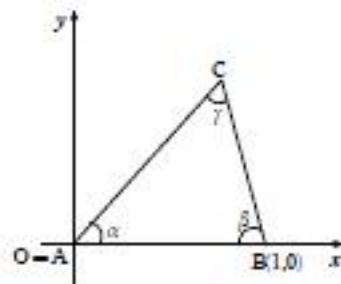
$$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} = f(n) \text{ とおく。}$$

m を1以上の自然数とすると、

2以上の自然数 n は、(i) $n = 2m$ または (ii) $n = 2m+1$ とおける。

$$\begin{cases} \text{(i) } n = 2m \text{ のとき, } f(n) = m(2m+1) \\ \text{(ii) } n = 2m+1 \text{ のとき, } f(n) = (m+1)(2m+1) \end{cases}$$

で、 $2m+1$ は3以上の奇数である。(証明終)



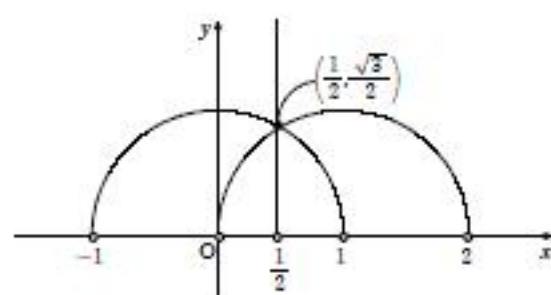
(1) $\triangle ABC$ が二等辺三角形 $\iff$ (i) または (ii) または (iii)

$$(i) \quad AB=AC \iff AB^2=AC^2 \iff x^2+y^2=1 \quad \cdots\cdots\textcircled{1}$$

$$(ii) \quad BA=BC \iff BA^2=BC^2 \iff (x-1)^2+y^2=1 \quad \cdots\cdots\textcircled{2}$$

$$(iii) \quad CA=CB \iff CA^2=CB^2 \iff x^2+y^2=(x-1)^2+y^2 \iff x=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots\textcircled{3}$$

($\textcircled{1}$ または $\textcircled{2}$ または $\textcircled{3}$) かつ $y=0$ を図示すると, 次のようになる.



左の図の (座標軸以外の) 実線
ただし, 白丸 (○) は除く.

$\cdots\cdots$ (答)

(2) $\triangle ABC$ が鋭角三角形 $\iff$ (iv) かつ (v) かつ (vi)

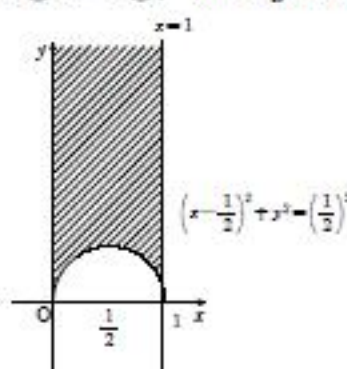
$$(iv) \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} > 0 \iff \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} > 0 \iff x > 0 \quad \cdots\cdots\textcircled{4}$$

$$(v) \quad \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} > 0 \iff \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} > 0 \iff x < 1 \quad \cdots\cdots\textcircled{5}$$

$$(vi) \quad \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} > 0 \iff \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -(x-1) \\ -y \end{pmatrix} > 0 \iff x(x-1)+y^2 > 0$$

$$\iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \cdots\cdots\textcircled{6}$$

($\textcircled{4}$ かつ $\textcircled{5}$ かつ $\textcircled{6}$) かつ $y=0$ を図示すると, 次のようになる.



左の図の斜線部分

ただし, 境界はすべて含まない.

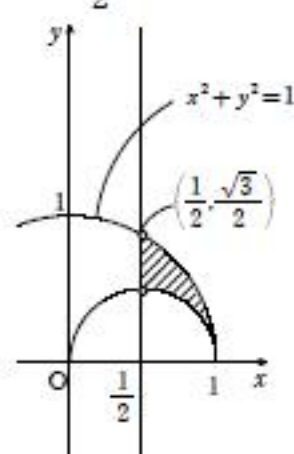
$\cdots\cdots$ (答)

(3) $\alpha \leq \beta \leq \gamma \iff BC \leq CA \leq AB \iff$ (i)' かつ (iii)'

$$(i)' \quad AB \geq AC \iff AB^2 \geq AC^2 \iff x^2+y^2 \leq 1 \quad \cdots\cdots\textcircled{1}'$$

$$(iii)' \quad CA \geq CB \iff CA^2 \geq CB^2 \iff x^2+y^2 \geq (x-1)^2+y^2 \iff x \geq \frac{1}{2} \quad \cdots\cdots\textcircled{3}'$$

$\alpha \leq \beta \leq \gamma < \frac{\pi}{2} \iff$ (2) の条件かつ $\textcircled{1}'$ かつ $\textcircled{3}'$ を図示すると, 次のようになる.

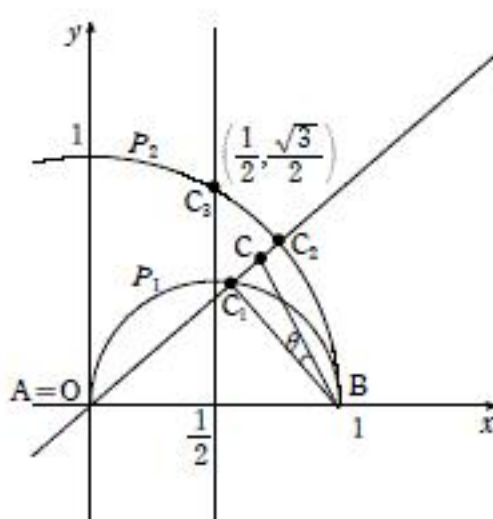


左の図の斜線の部分

境界は $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$ 上のみ

含まず, 他は含む.

(4)



$$P_1 = \left\{ (x, y) \left| \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2, \frac{1}{2} \leq x < 1, y > 0 \right. \right\}$$

$$P_2 = \left\{ (x, y) \left| x^2+y^2=1, \frac{1}{2} \leq x < 1, y > 0 \right. \right\}$$

$$P_3 = \left\{ (x, y) \left| x=\frac{1}{2}, \frac{1}{2} < y \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \right. \right\}$$

とおく.

(a) 原点を通り, P_1, P_2 と交わる直線上で
点 C を C_1 から C_2 まで動かす.

$$\angle AC_1B = \frac{\pi}{2},$$

$$\angle AC_2B = \angle AC_3B = \frac{\pi}{3} \text{ で,}$$

$$\angle CBC_1 = \theta \text{ は } 0 \text{ から } \frac{\pi}{6} \text{ まで}$$

連続的にすべての実数値をとりうる.

$$r = \frac{\pi}{2} - \theta \text{ であるから, このとき}$$

r のとりうる値の範囲は,

$$\frac{\pi}{3} \leq r \leq \frac{\pi}{2}$$

(b) 原点を通り, P_2, P_3 と交わる直線上で
点 C を C_1' から C_2 まで動かす.

$$\angle AC_1'B = \delta,$$

$$\angle AC_2B = \angle AC_3B = \frac{\pi}{3} \text{ で,}$$

$$\frac{\pi}{3} \leq \delta < \frac{\pi}{2},$$

$$\angle CBC_1 = \theta' \text{ は } 0 \text{ から } \delta - \frac{\pi}{3} \text{ まで}$$

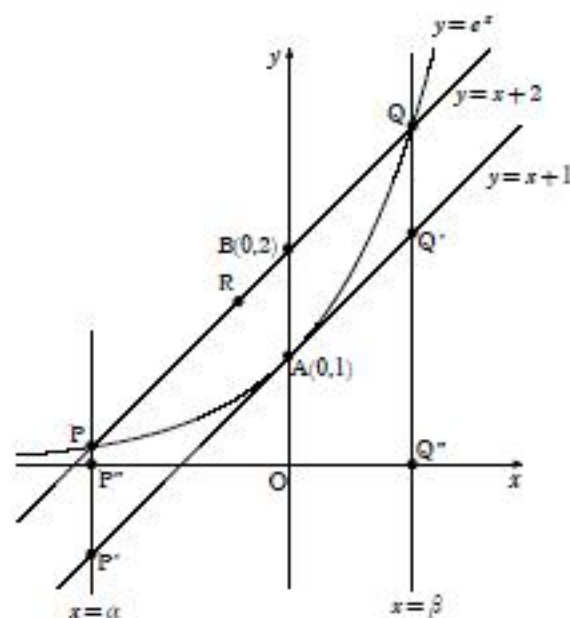
連続的にすべての実数値をとりうる.

$$r = \delta - \theta' \text{ であるから, このとき}$$

r のとりうる値の範囲は,

$$\frac{\pi}{3} \leq r \leq \delta$$

(a)(b) より, r のとりうる値の範囲は $\frac{\pi}{3} \leq r < \frac{\pi}{2}$ $\cdots\cdots$ (答)



- (1) 平行四边形 $PP'Q'Q$ の面積

$$\begin{aligned} S &= PP' \times P'Q' \\ &= 1 \cdot (\beta - \alpha) \\ &= \beta - \alpha \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

- (2) 点 P, Q は $y=e^x$ と $y=x+2$ の交点であるから

$$e^\alpha = \alpha + 2, e^\beta = \beta + 2 \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

が成り立つ.

$$\begin{aligned} T &= \int_{\alpha}^{\beta} \{(x+2) - e^x\} dx = \left[\frac{1}{2}(x+2)^2 - e^x \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \frac{1}{2} \{(\beta+2)^2 - (\alpha+2)^2\} - (e^\beta - e^\alpha) \\ &= \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(\beta + \alpha + 4) - (\beta - \alpha) \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(\beta + \alpha + 2) \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

- (3) $y=e^x$ のグラフは下に凸であるから,

$$\begin{aligned} T < S &\iff (\beta - \alpha) \left(\frac{\beta + \alpha}{2} + 1 \right) < \beta - \alpha \\ &\iff \frac{\beta + \alpha}{2} + 1 < 1 \quad (\because \beta - \alpha > 0) \\ &\iff \frac{\beta + \alpha}{2} < 0 \end{aligned}$$

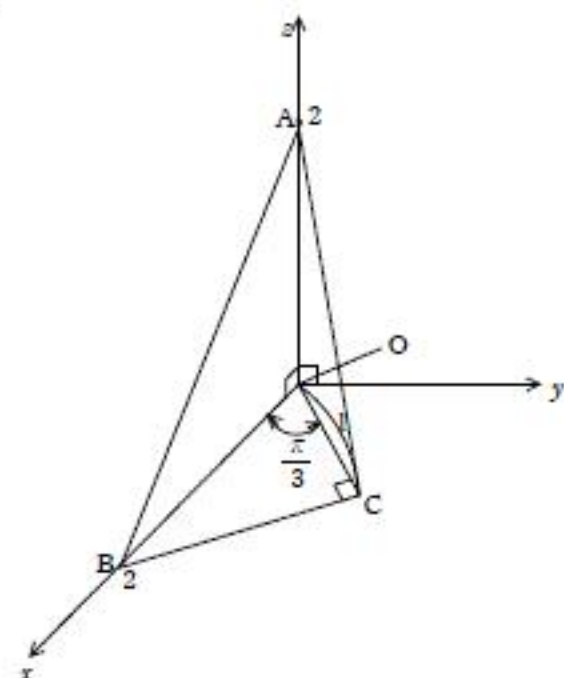
$e^\alpha > 0, e^\beta > 0$ より, $\frac{e^\beta + e^\alpha}{2} > 0$ であるから,

線分 PQ の中点 $R\left(\frac{\beta + \alpha}{2}, \frac{e^\beta + e^\alpha}{2}\right)$ は第2象限にある。(証明終)

- (4) $y=e^x$ のグラフは下に凸であるから, $\triangle APQ$ であり,

$$\begin{aligned} T > \triangle APQ &\iff \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(\beta + \alpha + 2) > \frac{1}{2}(\beta - \alpha) \\ &\iff \beta + \alpha + 2 > 1 \quad \left(\because \frac{1}{2}(\beta - \alpha) > 0 \right) \\ &\iff \beta + \alpha > -1 \quad (\text{証明終}) \end{aligned}$$

[4]



$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}, \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}, \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{c}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{p}$$

点 P は 3 点 A, B, C を通る平面上の点より,

$$\overrightarrow{p} = (1-s-t)\overrightarrow{a} + s\overrightarrow{b} + t\overrightarrow{c}$$

と表される.

$$|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = 2, |\overrightarrow{c}| = 1$$

$$(1) \quad \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| |\overrightarrow{b}| \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = |\overrightarrow{b}| |\overrightarrow{c}| \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a} = |\overrightarrow{c}| |\overrightarrow{a}| \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{a} &= (1-s-t)|\overrightarrow{a}|^2 + s\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + t\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} = 4(1-s-t) \\ \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{b} &= (1-s-t)\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + s|\overrightarrow{b}|^2 + t\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = 4s+t \\ \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{c} &= (1-s-t)\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a} + s\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} + t|\overrightarrow{c}|^2 = s+t \end{aligned} \right\} \dots\dots(\text{答})$$

(2) $\angle AOP = \angle BOP = \angle COP$ を満たすから

$$\cos \angle AOP = \cos \angle BOP = \cos \angle COP$$

$$\frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{p}}{|\overrightarrow{a}| |\overrightarrow{p}|} = \frac{\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{p}}{|\overrightarrow{b}| |\overrightarrow{p}|} = \frac{\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{p}}{|\overrightarrow{c}| |\overrightarrow{p}|}$$

$|\overrightarrow{p}| \neq 0, |\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = 2, |\overrightarrow{c}| = 1$, (1) の結果を代入して

$$2(1-s-t) = \frac{1}{2}(4s+t) = s+t$$

これを解いて,

$$(s, t) = \left(\frac{2}{9}, \frac{4}{9} \right) \dots\dots(\text{答})$$

$$(3) \quad \overrightarrow{p} = (1-s-t)\overrightarrow{a} + s\overrightarrow{b} + t\overrightarrow{c}$$

$$\overrightarrow{p} - \overrightarrow{a} = s(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) + t(\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a})$$

$$\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{2}{9}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}{2+1}$$

これは、線分 BC を 2 : 1 に内分する点 Q に対して $\overrightarrow{AQ} = \frac{\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}{3}$

点 P は線分 AQ を 2 : 1 に内分する点であることを示す $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AQ}$

よって、BQ : QC = 2 : 1 $\dots\dots(\text{答})$

$\overrightarrow{AR} = t\overrightarrow{AC}$ とし、点 P 線分 BC を 1 : k に内分しているとする

$$\overrightarrow{AP} = \frac{k\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}}{1+k} = \frac{2}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{9}\overrightarrow{AC}$$

$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ は 1 次独立である ($\overrightarrow{0}$ でも平行でもない) から、

$$\frac{k}{1+k} = \frac{2}{9}, \frac{t}{1+k} = \frac{4}{9}$$

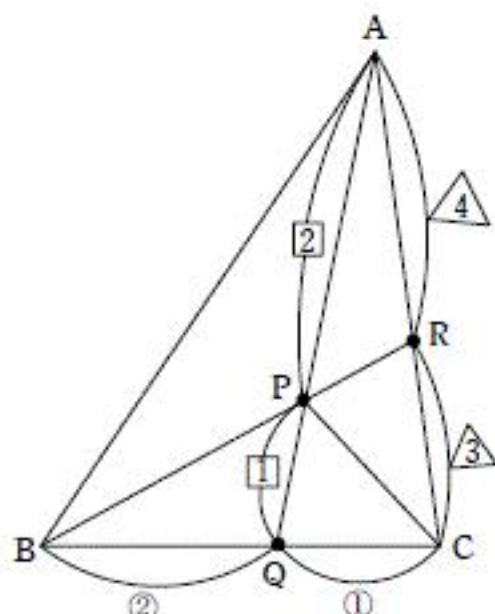
これを解いて

$$(k, t) = \left(\frac{2}{7}, \frac{4}{7} \right)$$

すなわち

$$AR : RC = 4 : 3 \dots\dots(\text{答})$$

(4)



$\triangle ABP, \triangle BCP, \triangle CAP$ を底面にとると
高さは等しい.

四面体 OABP, OBCP, OCAP の体積の比は
 $\triangle ABP, \triangle BCP, \triangle CAP$ の面積の比

$\triangle PCQ = k$ ($\neq 0$) とすると, $\triangle PBQ = 2k$
 $\triangle PAB = 4k, \triangle PBC = 3k, \triangle PCA = 2k$ より,
その比は 4 : 3 : 2 である.

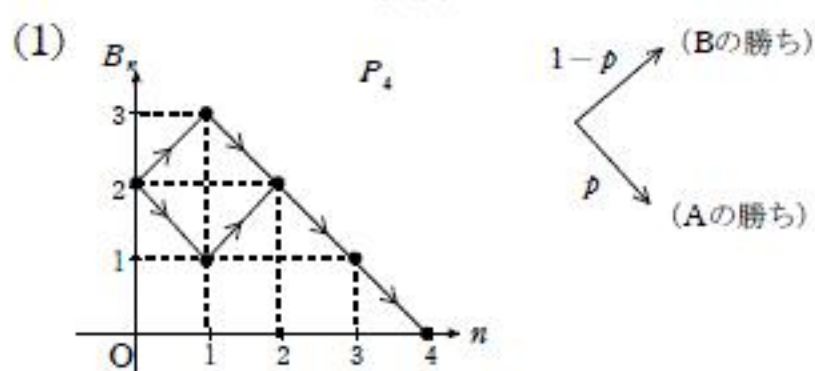
[5]

横軸に対戦回数, 縦軸に B の金貨の枚数を取り, n 回対戦した後の結果を点 (n, B_n) で表示すると, 1 回のゲームの結果は点 $(0, 2)$ を出発し横軸または $B_n = 4$ にいたる一連の経路により表現される.

また, m 回対戦して A が k 回勝ったとすると,

A は $2+k-(m-k)=2k-m+2$ 枚,

B は $-2k-m+2$ 枚所持している.



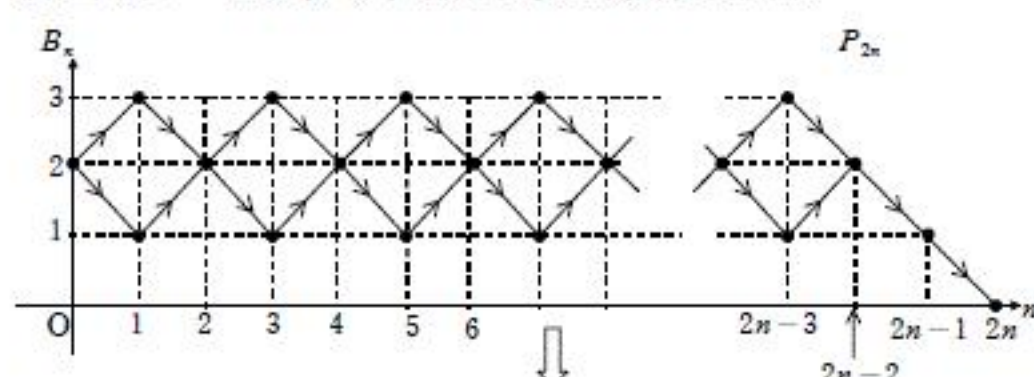
$$(m, k) = (4, 3)$$

$$P_4 = 2p^3(1-p) \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2) $m = 2n - 1$ のとき, B の枚数は, $-2k + (2n - 1) + 2 = 2(n - k) + 1$ で奇数となり, これが 0 になることはない.

したがって, $P_{2n-1} = 0 \quad \dots\dots(\text{答})$

(3) $2n$ 回でゲームが終了するのは次の場合である.



$S \diamond T$ が $(n-1)$ 回と
 $S \rightarrow T$ は 2 通りより,

点 $(0, 2)$ から点 $(2n-2, 2)$ へいたる経路は 2^{n-1} 通り

$$(m, k) = (2n, n+1)$$

$$P_{2n} = 2^{n-1} p^{n+1} (1-p)^{n-1} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(4) 終了回数が異なる事象は排反であるから,

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} P_k = \sum_{k=1}^n P_{2k} \quad (\because (2)) \\ &= \sum_{k=1}^n 2^{k-1} p^{k+1} (1-p)^{k-1} \\ &= p^2 \sum_{k=1}^n \{2p(1-p)\}^{k-1} \quad (\because (3)) \\ &= \frac{p^2 [1 - \{2p(1-p)\}^n]}{1 - 2p(1-p)} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

$\left(0 < p < 1 \text{ において, } 0 < 2p(1-p) \leq \frac{1}{2} \text{ である.} \right)$

(5) $0 < 2p(1-p) \leq \frac{1}{2}$ であるから, $\lim_{n \rightarrow \infty} \{2p(1-p)\}^n = 0$

$$\therefore S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \frac{p^2}{1 - 2p(1-p)}$$

$$\begin{aligned} p - S &= \frac{1}{1 - 2p(1-p)} \{1 - 2p(1-p) - p\} \\ &= \frac{p}{1 - 2p(1-p)} (1-p)(1-2p) \end{aligned}$$

$0 < p < 1, 1 - 2p(1-p) > 0, 1 - p > 0$ であるから, p と S の大小関係は

$$\begin{cases} 0 < p < \frac{1}{2} \text{ のとき, } & p > S \\ p = \frac{1}{2} \text{ のとき, } & p = S \\ \frac{1}{2} < p < 1 \text{ のとき, } & p < S \end{cases} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(補足)

(1) ~ (3) については, 漸化式を立てて解くことができる.

n 回対戦後に A の枚数が 1 枚, 2 枚, 3 枚である確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n とおくと,

$$\begin{cases} a_0 = 0, b_0 = 1, c_0 = 0 \\ a_{n+1} = (1-p)b_n & (n = 0, 1, 2, \dots) \\ b_{n+1} = pa_n + (1-p)c_n & (n = 0, 1, 2, \dots) \\ c_{n+1} = pb_n & (n = 0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

$P_n = pc_{n-1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$ である.

$b_{n+2} = 2p(1-p)b_n, b_0 = 1, b_1 = 0$ より, $b_{2n} \{2p(1-p)\}^n, b_{2n+1} = 0 \quad (n = 0, 1, \dots)$

$$P_1 = pc_0 = 0, P_{2n+1} = pc_{2n-2} = p^2 b_{2n-3} = 0 \quad (n = 2, 3, \dots)$$

$$P_{2n} = pc_{2n-1} = p^2 b_{2n-2} = p^2 \{2p(1-p)\}^{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad \text{である.}$$