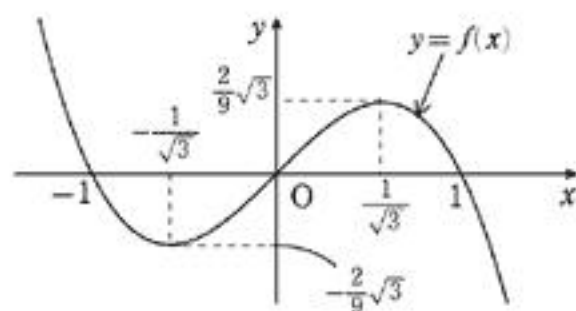


[1]

(1) $f(x) = x - x^3$ とおく.

$$f'(x) = 1 - 3x^2 = (1 + \sqrt{3}x)(1 - \sqrt{3}x)$$

x		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$



$$f(x) = \frac{1}{3}xf'(x) + \frac{2}{3}x$$

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pm\frac{2}{3\sqrt{3}} = \pm\frac{2}{9}\sqrt{3}$$

(複号同順)

(2) 点 $P(t, f(t))$ における曲線 $y = f(x)$ の方程式は

$$l: y - f(t) = f'(t)(x - t)$$

$$y - (t - t^3) = (1 - 3t^2)(x - t)$$

 $y = f(x)$ との交点 Q の座標を求めるから, $y = f(x)$ と連立させて

$$(x - x^3) - (t - t^3) = (1 - 3t^2)(x - t)$$

$$(x - t) - (x - t)(x^2 + xt + t^2) = (1 - 3t^2)(x - t)$$

$$(x - t)\{1 - (x^2 + xt + t^2) - (1 - 3t^2)\} = 0$$

$$(x - t)^2(x + 2t) = 0$$

 Q は P と異なる点であるから,点 Q の x 座標 $u = -2t$ である. ($t > 0$ より $u \neq t$)

(2)(別解)

 x の 3 次方程式 $f(x) - f(t) = f'(t)(x - t)$ (……①) の x^2 の係数は 0.点 Q の x 座標を u とする. $x = t$ で $y = f(x)$ と l は接しているから, ①は t を重解としてもつ.

よって, 3 次方程式の解と係数の関係から

$$t + t + u = 0 \quad \therefore u = -2t \quad \text{……(答)}$$

($t > 0$ よりも $u \neq t$ すなわち $Q \neq P$ である)(3) $P(t, f(t)), Q(u, f(u))$ とすると, $\triangle OPQ = \frac{1}{2}|tf(u) - uf(t)|$ で

あるから

$$\triangle OPQ = 12 \quad \text{すなわち}$$

$$|tf(u) - uf(t)| = 24$$

 $u = -2t$ を代入して整理すると, $t^4 = 4$ すなわち

$$(t + \sqrt{2})(t - \sqrt{2})(t^2 + 2) = 0$$

$$t^2 + t > 0, t > 0 \text{ より} \quad t = \sqrt{2} \quad \text{……(答)}$$

[2]

(1) 偽, (反例) $(x, y) = (-1, 0)$ (答)

(補足) $x - y < 0$ のとき,

$$\begin{cases} x + y > 0 \text{ ならば } (x + y)(x - y) < 0 \iff x^2 < y^2 \\ x + y \leq 0 \text{ ならば } (x + y)(x - y) \geq 0 \iff x^2 \geq y^2 \end{cases}$$

であるから, $x - y < 0$ かつ $x + y \leq 0$ を満たすものを反例として挙げればよい.

(2) 偽, (反例) $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ (答)

(補足) $y = \log_2 x, y = \log_3 x$ のグラフの位置関係は次のようになっている.

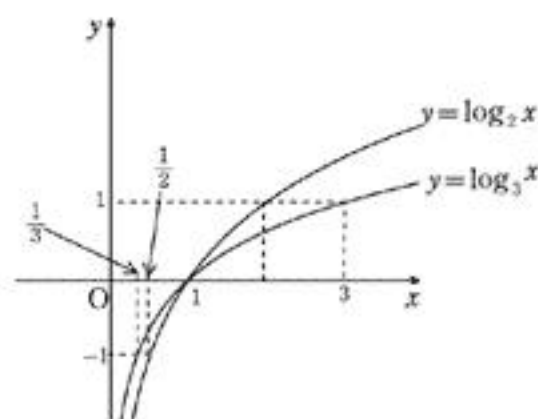
数式で考えるなら

$\log_2 x \neq 0$ のとき $[(x, y) \neq (1, 1)]$ のとき

$$\log_2 x = \log_3 y \iff \log_2 3 = \frac{\log_2 y}{\log_2 x}$$

$$\log_2 3 > 1 \text{ より } \frac{\log_2 y}{\log_2 x} > 1$$

$$\begin{cases} \bullet \log_2 x > 0 \ (x > 1) \text{ のとき} \\ \quad \log_2 y > \log_2 x \iff x < y \\ \bullet \log_2 x < 0 \ (0 < x < 1) \text{ のとき} \\ \quad \log_2 y < \log_2 x \iff x > y \end{cases}$$



(3) 偽, (反例) $f(x) = x^3$

関数 $f(x) = x^3$ に対して, $f'(0) = 0$ だが, $x = 0$ の前後で $f'(x)$ の符号が変化しないから, $x = 0$ で極値をとらない.

(4) 真

(証明)

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} = f(n) \text{ とおく.}$$

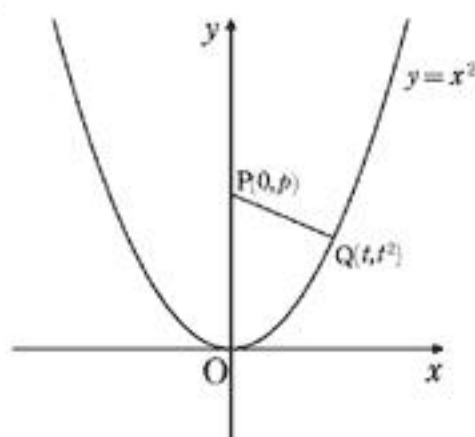
m を 1 以上の自然数とすると,

2 以上の自然数 n は (i) $n = 2m$, または (ii) $n = 2m + 1$ とおける.

$$\begin{cases} \text{(i) } n = 2m \text{ のとき} & f(n) = m(2m+1) \\ \text{(ii) } n = 2m+1 \text{ のとき} & f(n) = (m+1)(2m+1) \end{cases}$$

で, $2m+1$ は 3 以上の奇数である. (証明終)

[3]



定点 $P(0, p)$, 動点 $Q(t, t^2)$ とおき, PQ^2 を t の関数として $g(t)$ とおく.

$$g(t) = t^2 + (t^2 - p)^2 = t^4 - (2p - 1)t^2 + p^2$$

$$= \left\{ t^2 - \left(p - \frac{1}{2} \right) \right\}^2 + p^2 - \left(p - \frac{1}{2} \right)^2$$

$$= \left\{ t^2 - \left(p - \frac{1}{2} \right) \right\}^2 + \left(p - \frac{1}{4} \right)$$

よって, $g(t)$ は

$$\begin{cases} \text{(i)} & p - \frac{1}{2} \leq 0 \iff p \leq \frac{1}{2} \text{ のとき, } t^2 = 0 \text{ で最小値 } p^2 \\ \text{(ii)} & p - \frac{1}{2} \geq 0 \iff p \geq \frac{1}{2} \text{ のとき, } t^2 = p - \frac{1}{2} \text{ で最小値 } p - \frac{1}{4} \end{cases}$$

をとるから, 点 P と $y = x^2$ のグラフの距離 d は

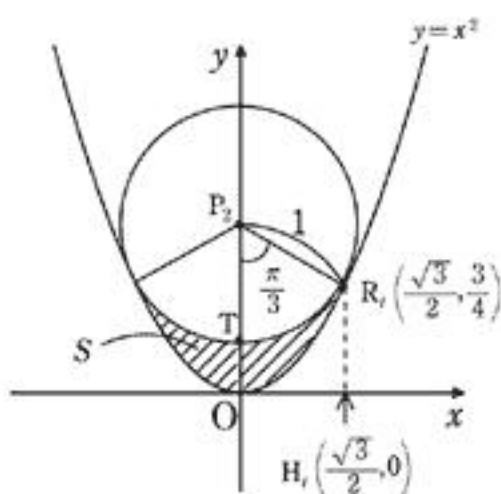
$$d = \begin{cases} |p| & \left(p \leq \frac{1}{2} \right) \\ \sqrt{p - \frac{1}{4}} & \left(p \geq \frac{1}{2} \right) \end{cases} \quad \text{となる.}$$

$$(1) \quad d_1 = \frac{1}{3} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$(2) \quad d_2 = 1, \text{ このとき } t^2 = \frac{5}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \text{ より } t = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \left\{ \dots\dots(\text{答}) \right.$$

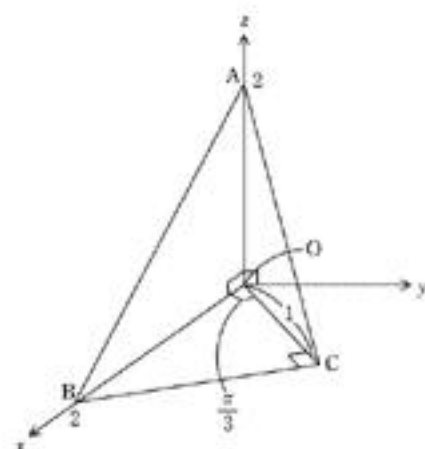
したがって, $d_2 = PR_2$ となる点 R は $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4} \right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4} \right)$

(3) (2) の考察により, 点 P_2 を中心とする半径 1 の円と $y = x^2$ のグラフの位置関係は次のようになっている.



y 軸に関する対称性から,

$$\begin{aligned} S &= 2 \left\{ (\text{台形 } P_2OH_1R_1) - (\text{図形 } OH_1R_1) - (\text{扇形 } P_2 - \widehat{TR_1}) \right\} \\ &= 2 \left\{ \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{4} + \frac{3}{4} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} x^2 dx - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{3} \right\} \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{6} \right) \\ &= 2 \left(\frac{3}{8} \sqrt{3} - \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \frac{3}{4} \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$



$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c},$$

$$\overrightarrow{OP} = \vec{p}$$

点 P は 3 点 A, B, C を通る平面上の点より $\vec{p} = (1-s-t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$ と表される.

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 1$$

$$(1) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}| |\vec{c}| \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = |\vec{c}| |\vec{a}| \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{p} \cdot \vec{a} &= (1-s-t)|\vec{a}|^2 + s\vec{a} \cdot \vec{b} + t\vec{a} \cdot \vec{c} = 4(1-s-t) \\ \vec{p} \cdot \vec{b} &= (1-s-t)\vec{a} \cdot \vec{b} + s|\vec{b}|^2 + t\vec{b} \cdot \vec{c} = 4s+t \\ \vec{p} \cdot \vec{c} &= (1-s-t)\vec{c} \cdot \vec{a} + s\vec{b} \cdot \vec{c} + t|\vec{c}|^2 = s+t \end{aligned} \right\} \dots\dots(\text{答})$$

(2) $\angle AOP = \angle BOP = \angle COP$ を満たすから

$$\cos \angle AOP = \cos \angle BOP = \cos \angle COP$$

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{p}}{|\vec{a}| |\vec{p}|} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{p}}{|\vec{b}| |\vec{p}|} = \frac{\vec{c} \cdot \vec{p}}{|\vec{c}| |\vec{p}|}$$

$|\vec{p}| \neq 0, |\vec{a}| = |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 1$, (1) の結果を代入して

$$2(1-s-t) = \frac{1}{2}(4s+t) = s+t$$

これを解いて, $(s, t) = \left(\frac{2}{9}, \frac{4}{9}\right)$ \dots\dots(\text{答})

$$(3) \quad \vec{p} = (1-s-t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$$

$$\vec{p} - \vec{a} = s(\vec{b} - \vec{a}) + t(\vec{c} - \vec{a})$$

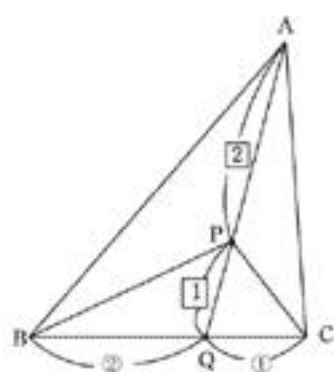
$$\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} = \frac{2}{9}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}{2+1}$$

これは, 線分 BC を 2:1 に内分する点 Q に対して $\left(\overrightarrow{AQ} = \frac{\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}{3}\right)$

点 P は線分 AQ を 2:1 に内分する点であることを示す. $\left(\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AQ}\right)$

よって, $BQ : QC = 2:1$ \dots\dots(\text{答})

(4)



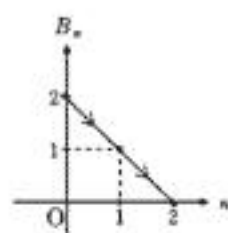
$\triangle ABP, \triangle ACP$ を底面にとると, 高さは等しいから, 四面体 OABP と OACP の体積の比は, $\triangle ABP, \triangle ACP$ の面積の比 $\triangle PCQ = k$ ($\neq 0$) とすると, $\triangle PBQ = 2k, \triangle PAB = 4k, \triangle PCA = 2k$ よりその比は 2:1 である.

横軸に対戦回数, 縦軸に B の金貨の枚数を取り, n 回対戦した後の結果を点 (n, B_n) で表示すると, 1 回のゲームの結果は点 $(0, 2)$ を出発し横軸または $B_n = 4$ にいたる一連の経路により表現される.

また, m 回対戦して A が k 回勝ったとすると,

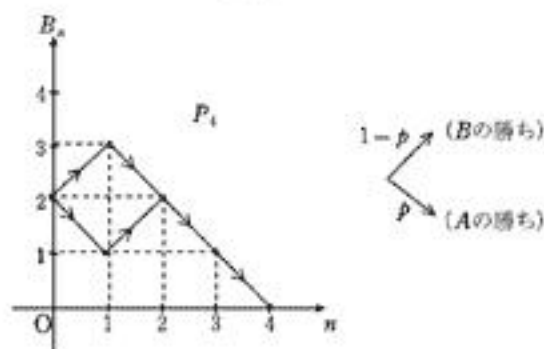
A は $2+k-(m-k)=2k-m+2$ 枚, B は $-2k+m+2$ 枚所持している.

(1)



$$(m, k) = (2, 2)$$

$$P_2 = p^2$$



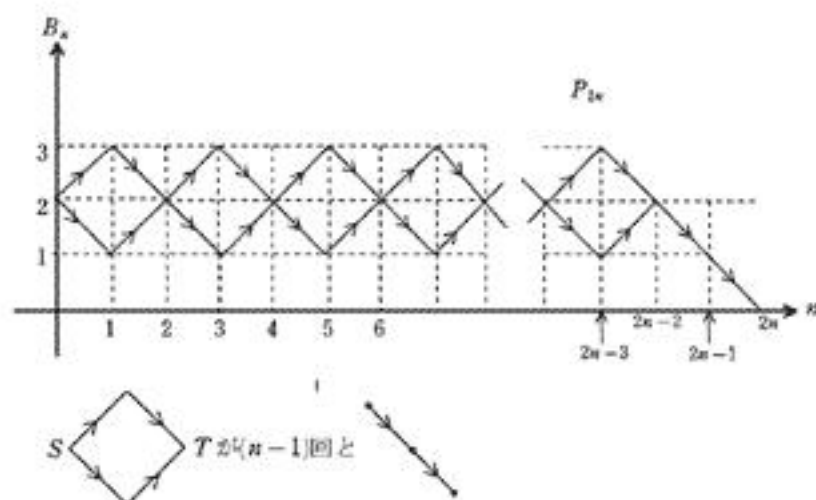
$$(m, k) = (4, 3)$$

$$P_4 = 2p^3(1-p) \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2) $m = 2n - 1$ のとき, B の枚数は $-2k + (2n - 1) + 2 = 2(n - k) + 1$ で奇数となり, これが 0 になることはない.

したがって, $P_{2n-1} = 0 \quad \dots\dots(\text{答})$

(3) $2n$ 回でゲームが終了するのは次の場合である.



$S \rightarrow T$ は 2 通りより

点 $(0, 2)$ から点 $(2n - 2, 2)$ へいたる経路は 2^{n-1} 通り

$$(m, k) = (2n, n + 1)$$

$$P_{2n} = 2^{n-1} p^{n+1} (1-p)^{n-1} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(4) 終了回数が異なる事象は排反であるから

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} P_k = \sum_{k=1}^n P_{2k} \quad (\because (2))$$

$$= \sum_{k=1}^n 2^{k-1} p^{k+1} (1-p)^{k-1}$$

$$= p^2 \sum_{k=1}^n \{2p(1-p)\}^{k-1} \quad (\because (3))$$

$$= \frac{p^2 [1 - \{2p(1-p)\}^n]}{1 - 2p(1-p)} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$\left(0 < p < 1 \text{ において, } 0 < 2p(1-p) \leq \frac{1}{2} \text{ である.} \right)$$