

学 力 検 査 問 題

数 学

数学 I, 数学 II
数学 A, 数学 B

平成 21 年 2 月 25 日

自 9 時 00 分

至 11 時 00 分

答案作成上の注意

- 1 この問題冊子には、数学 I, 数学 II, 数学 A, 数学 B (数列, ベクトル) の問題が 5 問あります。総ページは 11 ページで、問題は偶数ページにあります。
- 2 解答用紙は 5 枚 (表面) です。解答はすべて対応する番号の解答用紙の所定の解答欄に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。
- 3 受験番号 は、それぞれの解答用紙の所定の欄 (2 ヶ所) に必ず記入しなさい。
- 4 試験終了後は、解答用紙の右上の番号の順に並べなさい。
- 5 配付した解答用紙は、持ち出してはいけません。

〔 1 〕 関数 $y = x - x^3$ のグラフと、その上の点 $P(t, t - t^3)$ 、および点 P における接線 ℓ を考える。ただし $t > 0$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $y = x - x^3$ の増減を調べ、極値を求めよ。また、そのグラフをかけ。

(2) ℓ と $y = x - x^3$ のグラフの交点を Q とおく。ただし Q は P と異なる点とする。点 Q の x 座標を求めよ。

(3) 三角形 OPQ の面積が 12 になるとき t を求めよ。ただし点 O は原点である。

〔2〕 以下のそれぞれの命題が真であるか偽であるかを答え，真の場合は証明を，偽の場合は反例を与えよ。

(1) $x < y$ ならば $x^2 < y^2$ である。

(2) $\log_2 x = \log_3 y$ ならば $x \leq y$ である。

(3) 微分可能な関数 $f(x)$ が $f'(a) = 0$ を満たすならば， $f(x)$ は $x = a$ において極値をとる。

(4) n が 2 以上の自然数ならば， $1 + 2 + \cdots + n$ の約数の中に 3 以上の奇数がある。

〔3〕 座標平面上の定点 P と、関数 $y = f(x)$ のグラフ上を動く点 Q を考える。このとき、点 P と点 Q の距離 PQ の最小値を、点 P と $y = f(x)$ のグラフの距離と呼ぶことにする。次の問いに答えよ。

(1) 点 $P_1 \left(0, \frac{1}{3}\right)$ と $y = x^2$ のグラフの距離 d_1 の値を求めよ。

(2) 点 $P_2 \left(0, \frac{5}{4}\right)$ と $y = x^2$ のグラフの距離 d_2 の値を求めよ。

また、 $d_2 = P_2R$ となる $y = x^2$ のグラフ上の点 R をすべて求めよ。

(3) 点 P_2 を中心とする半径 d_2 の円と $y = x^2$ のグラフで囲まれた部分の面積 S を求めよ。

〔 4 〕 四面体 OABC において,

$$\angle AOB = \angle AOC = \frac{\pi}{2}, \quad \angle BOC = \frac{\pi}{3}, \quad OA = OB = 2, \quad OC = 1$$

とする。3 点 A, B, C を通る平面上の点 P を考え, $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ とする。
 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき, $\vec{p}$ は実数 s, t を用いて

$$\vec{p} = (1 - s - t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$$

と表される。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 内積 $\vec{p} \cdot \vec{a}$, $\vec{p} \cdot \vec{b}$, $\vec{p} \cdot \vec{c}$ を s, t を用いて表せ。
- (2) 点 P が $\angle AOP = \angle BOP = \angle COP$ を満たすとき, s, t の値を求めよ。
- (3) (2) の条件を満たす点 P について, 直線 AP と直線 BC の交点を Q とする。BQ : QC を求めよ。
- (4) (2) の条件を満たす点 P について, 2 つの四面体 OABP と OACP の体積の比を求めよ。

〔5〕 2人のプレイヤー A, B が対戦を繰り返すゲームを行う。1回の対戦につき A が勝つ確率は p であり, B が勝つ確率は $1-p$ であるとする (ただし $0 < p < 1$)。A と B は初めにそれぞれ 2枚の金貨を持っている。1回の対戦につき勝者は敗者から 1枚の金貨を受け取る。対戦を繰り返して一方のプレイヤーがすべての金貨を手に入れたとき, ゲームを終了する。ちょうど n 回の対戦で A がすべての金貨を手に入れる確率を P_n とする。ただし n は自然数とする。

(1) P_2 と P_4 を求めよ。

(2) P_{2n-1} を求めよ。

(3) P_{2n} を求めよ。

(4) $2n$ 回以内の対戦で A がすべての金貨を手に入れる確率 S_n を求めよ。