〔1〕

(1)

$$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$$

より，

$$\begin{cases}a=0\\c=3\end{cases}\qquad\cdots①$$

である。さらに，P_1の座標は，

$$A\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3b\\3d\end{pmatrix}$$

であり，1 次変換 f で点P_1が点P_1に移されることから，

$$A\begin{pmatrix}3b\\3d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3b\\3d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3ab+3bd\\3bc+3d^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}3ab+3bd=1\\3bc+3d^2=0\end{cases}\qquad\cdots②$$

である。①，②より，

$$a=0,\ b=-\frac{1}{3},\ c=3,\ d=-1$$

であるから，

$$A=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{3}\\3&-1\end{pmatrix}$$

である。

(答)　$A=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{3}\\3&-1\end{pmatrix}$

(2)

ケーリー・ハミルトンの公式より，

$$A^2+A+E=O$$

が成立し，

$$A^3-E=(A-E)(A^2+A+E)=O$$

より，

$$A^3=E$$

であることが分かる。ここで，

$$A^2=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{3}\\3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{3}\\3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&\frac{1}{3}\\-3&0\end{pmatrix}$$

より，m を 0 以上の整数として，

$$A^n=\begin{cases}A=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{3}\\3&-1\end{pmatrix}&(n=3m+1)\\A^2=\begin{pmatrix}-1&\frac{1}{3}\\-3&0\end{pmatrix}&(n=3m+2)\\E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}&(n=3m)\end{cases}$$

である。

(答)　$A^n=\begin{cases}A=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{3}\\3&-1\end{pmatrix}&(n=3m+1)\\A^2=\begin{pmatrix}-1&\frac{1}{3}\\-3&0\end{pmatrix}&(n=3m+2)\\E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}&(n=3m)\end{cases}$

(3)

点 Q の座標は，

$$\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{3}\\3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\sin\theta\\3\cos\theta-\sin\theta\end{pmatrix}$$

より，

$$\overline{\mathrm{OQ}}=\left(-\frac{1}{3}\sin\theta,\ 3\cos\theta-\sin\theta\right)$$

であるから，

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{OP}}\cdot\overline{\mathrm{OQ}}&=(\cos\theta,\ \sin\theta)\cdot\left(-\frac{1}{3}\sin\theta,\ 3\cos\theta-\sin\theta\right)\\&=-\frac{1}{3}\sin\theta\cos\theta+3\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta\\&=\frac{4}{3}\sin 2\theta-\frac{1-\cos 2\theta}{2}\\&=\frac{8\sin 2\theta+3\cos 2\theta}{6}-\frac{1}{2}\\&=\frac{\sqrt{73}}{6}\sin(2\theta+\alpha)-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

と表すことができる。ここで，α は，

$$\tan\alpha=\frac{3}{8}\quad\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$$

を満たす角である。$0\leqq\theta\leqq 2\pi$ より，

$$\alpha\leqq 2\theta+\alpha\leqq 4\pi+\alpha$$

であるから，

$$\begin{aligned}&-1\leqq\sin(2\theta+\alpha)\leqq 1\\&\Leftrightarrow-\frac{\sqrt{73}}{6}\leqq\frac{\sqrt{73}}{6}\sin(2\theta+\alpha)\leqq\frac{\sqrt{73}}{6}\\&\Leftrightarrow-\frac{\sqrt{73}}{6}-\frac{1}{2}\leqq\overline{\mathrm{OP}}\cdot\overline{\mathrm{OQ}}\leqq\frac{\sqrt{73}}{6}-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。

(答)　$-\frac{\sqrt{73}}{6}-\frac{1}{2}\leqq\overline{\mathrm{OP}}\cdot\overline{\mathrm{OQ}}\leqq\frac{\sqrt{73}}{6}-\frac{1}{2}$

〔2〕

問の条件より，$P(x)$ を $x-3$ で割った余りが $10-6p$ であるので，$P(3)=10-6p$ である。

$$P(3)=27-9(2p+a)+3(2ap+1)-a=10-6p$$
$$\Leftrightarrow 3ap-5a-6p+10=0$$
$$\Leftrightarrow (a-2)\left(p-\frac{5}{3}\right)=0 \qquad \cdot\cdot\cdot ①$$

(1)

$$P(x)=(x-a)(x^2-2px+1)$$

と因数分解できる。

$x^2-2px+1$ が実数の範囲でさらに因数分解できると仮定すると，$P(x)=0$ の実数解が a のみであるという条件より，

$$x^2-2px+1=(x-a)^2$$

である必要がある。係数を比較して解いて，$p=a=1$ または $p=a=-1$ のいずれか。これらはいずれも①を満たさず矛盾する。結局 $x^2-2px+1$ は実数の範囲でこれ以上因数分解できないことが分かる。

（答）　$P(x)=(x-a)(x^2-2px+1)$

(2)

(1)より，$x^2-2px+1=0$ は実数解を持たない。すなわち，この2次方程式の判別式を D_1 として，

$$\frac{D_1}{4}=p^2-1<0$$
$$\Leftrightarrow -1<p<1 \qquad \cdot\cdot\cdot ②$$

が成り立つ。①，②より，$a=2$

（答）　$a=2$

(3)

(2)の結果より，

$$P(x)=x^3-2(p+1)x^2+(4p+1)x-2$$

である。

$$P'(x)=3x^2-4(p+1)x+4p+1=0$$

が異なる2実数解を持たなければよいから，この2次方程式の判別式を D_2 と置くと，

$$\frac{D_2}{4}=\{2(p+1)\}^2-3(4p+1)$$
$$=4p^2-4p+1$$
$$=(2p-1)^2$$

より，

$$(2p-1)^2\leqq 0$$

$$\Leftrightarrow p=\frac{1}{2}$$

を得る。これは，②を満たす。

（答）　$p=\frac{1}{2}$

〔3〕

(1)

$$xe^x = tx$$
$$\Leftrightarrow x\left(e^x - t\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0,\ \log t$$

であり，

$$0 \leqq \log t \leqq 1$$

となるのは，

$$1 \leqq t \leqq e$$

のときである。よって，$t > 1$ より，

$$x = 0 \quad (t > e)$$
$$x = 0,\ \log t \quad (1 < t \leqq e)$$

である。

(答) $x = 0 \quad (t > e)$
$x = 0,\ \log t \quad (1 < t \leqq e)$

(2)

[1] $1 < t \leqq e$ のとき

$$S(t) = \int_0^{\log t}\left(tx - xe^x\right)dx + \int_{\log t}^1\left(xe^x - tx\right)dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}tx^2 - xe^x\right]_0^{\log t} + \int_0^{\log t} e^x\,dx + \left[xe^x - \frac{1}{2}tx^2\right]_{\log t}^1 - \int_{\log t}^1 e^x\,dx$$
$$= t(\log t)^2 - 2t\log t + \frac{3}{2}t - 1$$

である。

[2] $t > e$ のとき

$$S(t) = \int_0^1\left(tx - xe^x\right)dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}tx^2 - xe^x\right]_0^1 + \int_0^1 e^x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}t - 1$$

である。

以上をまとめて，

$$S(t) = \begin{cases} t(\log t)^2 - 2t\log t + \frac{3}{2}t - 1 & (1 < t \leqq e) \\ \frac{1}{2}t - 1 & (t > e) \end{cases}$$

である。

(答) $S(t) = \begin{cases} t(\log t)^2 - 2t\log t + \frac{3}{2}t - 1 & (1 < t \leqq e) \\ \frac{1}{2}t - 1 & (t > e) \end{cases}$

(3)

[1] $1 < t \leqq e$ のとき

$$S'(t) = (\log t)^2 + 2\log t - 2\log t - 2 + \frac{3}{2}$$
$$= (\log t)^2 - \frac{1}{2}$$

である。

[2] $t > e$ のとき

$$S'(t) = \frac{1}{2} > 0$$

である。

これらより，$t > 1$ で $S(t)$ の増減表を描くと次のようになる。

t	1	$\cdots$	$e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$	$\cdots$
$S'(t)$		−	0	+
$S(t)$		↘	最小	↗

これより，$t = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ のとき $S(t)$ は最小となる。

(答) $t = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

〔4〕

(1)

3 人の玉の取り出し方は

$$n\cdot n\cdot n=n^3\text{(通り)}$$

である。勝者が 3 人とは，3 人の得点が一致するような玉の取り出し方で，

$$n\text{(通り)}$$

である。よって，

$$\begin{aligned}P_n(3)&=\frac{n}{n^3}\\&=\frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

である。

（答）　$P_n(3)=\dfrac{1}{n^2}$

(2)

勝者が 2 人となるとき，どの 2 人が勝者となるかで，

$${}_3C_2=3\text{(通り)}$$

ある。この各々に対して，

[1]　2 人の勝者の取り出した玉に書かれた数字が 2 のとき
　残りの 1 人は 1 と書かれた玉を取り出すので，このような取り出しかたは 1 通りである。

[2]　2 人の勝者の取り出した玉に書かれた数字が 3 のとき
　残りの 1 人は 1 または 2 と書かれた玉を取り出すので，このような取り出し方は 2 通りである。

以上から，

$$\begin{aligned}P_3(2)&=\frac{{}_3C_2\cdot 3}{3^3}\\&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

である。

（答）　$P_3(2)=\dfrac{1}{3}$

(3)

A が k 点$(k\geqq 2)$で 1 人勝ちする確率は，

$$\frac{{}_{k-1}C_1\cdot{}_{k-1}C_1}{n^3}=\frac{(k-1)^2}{n^3}$$

である。よって，誰か 1 人が勝つ確率は，

$$\begin{aligned}P_n(1)&=\sum_{k=2}^{n}\frac{3(k-1)^2}{n^3}\\&=\frac{3}{n^3}\sum_{k=2}^{n}(k^2-2k+1)\\&=\frac{3}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k^2-2k+1)\\&=\frac{3}{n^3}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n\right\}\\&=\frac{3}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)\\&=\frac{(n-1)(2n-1)}{2n^2}\end{aligned}$$

である。

（答）　$\dfrac{(n-1)(2n-1)}{2n^2}\quad(n\geqq 2)$

(4)

$$\begin{aligned}&\frac{(n-1)(2n-1)}{2n^2}\geqq 0.9\\&\Leftrightarrow\frac{(n-1)(2n-1)}{2n^2}\geqq\frac{9}{10}\\&\Leftrightarrow n^2-15n+5\geqq 0\\&\Leftrightarrow n\leqq\frac{15-\sqrt{205}}{2},\ \frac{15+\sqrt{205}}{2}\leqq n\end{aligned}$$

であり，$n\geqq 2$ より，$n\geqq\dfrac{15+\sqrt{205}}{2}$ である。

これを満たす最小の n は 15。

（答）　$n=15$

〔5〕

(1)

$x=4l+1$, $y=4m+1$ （l と m は 0 以上の整数）

と置ける。

$$
\begin{aligned}
xy &= (4l+1)(4m+1)\\
&= 4(4lm+l+m)+1
\end{aligned}
$$

であり，xy は 4 で割ると 1 余る数であることが分かる。よって，x と y が A に属するならば，xy も A に属することが示された。

(証明終)

(2)

「i が 0 以上の整数のとき，3^{2i} は A に属する」

を数学的帰納法で示す。

[1] $i=0$ のとき

$$3^0=1$$

より，3^0 は A に属する

[2] $i=j$ で成立を仮定する

このとき，

$3^{2j}=4N+1$ （N は 0 以上の整数）

と表すことができ，

$$
\begin{aligned}
3^{2(j+1)} &= 3^{2j}\cdot 3^2\\
&= 9(4N+1)\\
&= 4(9N+2)+1
\end{aligned}
$$

である。これより，$i=j+1$ でも成立する。

以上，数学的帰納法より，題意は示された。

(証明終)

(3)

(2)と同様に，「i が 0 以上の整数のとき，7^{2i} は A に属する」ことを数学的帰納法で示す。

[1] $i=0$ のとき

$$7^0=1$$

より，7^0 は A に属する

[2] $i=j$ で成立を仮定する

このとき，

$7^{2j}=4M+1$ （M は 0 以上の整数）

と表すことができ，

$$
\begin{aligned}
7^{2(j+1)} &= 7^{2j}\cdot 7^2\\
&= 49(4M+1)\\
&= 4(49M+12)+1\in A
\end{aligned}
$$

より，$i=j+1$ でも成立する。

以上，[1], [2]より 0 以上の偶数 n に対して，7^n が A に属することが示された。

ここで，$m+n=$(偶)となるのは，m と n の偶奇が一致する時である。

[a] m と n がともに偶数のとき

(2)と(3)で証明された事柄から，3^m, 7^n は共に A に属し，(1)より，その積 3^m7^n も A に属する。

[b] m と n がともに奇数のとき

$$3^m7^n=3^{m-1}\cdot 7^{n-1}\cdot 21$$

と表され，$m-1$ と $n-1$ は共に偶数なので，3^{m-1} と 7^{n-1} は共に A に属し，(1)より $3^{m-1}\cdot 7^{n-1}$ も A に属する。さらに，21 も 4 で割ると余りが 1 なので，A に属する。すなわち，3^m7^n も A に属することが分かる。

[c] m が偶数，n が奇数のとき

$$3^m7^n=3^m\cdot 7^{n-1}\cdot 7$$

と表され，3^m と 7^{n-1} は共に A に属するので，$3^m\cdot 7^{n-1}$ も A に属する。0 以上の整数 M を用いて $3^m\cdot 7^{n-1}=4M+1$ と書けば，

$$3^m7^n=(4M+1)\cdot 7=4(7M+1)+3$$

であり，3^m7^n は A に属さない。

[d] m が奇数，n が偶数のとき

[c]と同様に考えて，$3^{m-1}\cdot 7^n$ が A に属するので，0 以上の整数 M を用いて $3^{m-1}\cdot 7^n=4M+1$ と書けば，

$$3^m7^n=(4M+1)\cdot 3=4\cdot 3M+3$$

であり，3^m7^n は A に属さない。

以上[a][b][c][d]より，題意は示された。

(証明終)

(4)

求める整数和を T と置くと，

$$
\begin{aligned}
T &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{m}3^{2i}7^{2j}+\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{m}3^{2i+1}7^{2j+1}\\
&= \frac{9^{m+1}-1}{9-1}\cdot\frac{49^{n+1}-1}{49-1}+\frac{3(9^{m+1}-1)}{9-1}\cdot\frac{7(49^{n+1}-1)}{49-1}\\
&= \frac{1}{8\cdot 48}(9^{m+1}-1)(49^{n+1}-1)+\frac{21}{8\cdot 48}(9^{m+1}-1)(49^{n+1}-1)\\
&= \frac{11}{192}(9^{m+1}-1)(49^{n+1}-1)
\end{aligned}
$$

である。

(答) $\dfrac{11}{192}(9^{m+1}-1)(49^{n+1}-1)$