〔1〕

(1)

$y=kx^2$ と $y=kx+\dfrac{1}{k}$ を連立して，

$$
\begin{aligned}
&kx^2=kx+\frac{1}{k}\\
&\Leftrightarrow k^2x^2-k^2x-1=0\\
&\Leftrightarrow x=\frac{k\pm\sqrt{k^2+4}}{2k}
\end{aligned}
$$

である。よって，

$$\alpha=\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2k}$$

を得る。同じく，$y=kx^2$ と $y=-kx+\dfrac{1}{k}$ を連立して，

$$
\begin{aligned}
&kx^2=-kx+\frac{1}{k}\\
&\Leftrightarrow k^2x^2+k^2x-1=0\\
&\Leftrightarrow x=\frac{-k\pm\sqrt{k^2+4}}{2k}
\end{aligned}
$$

である。よって，

$$\beta=\frac{-k+\sqrt{k^2+4}}{2k}$$

を得る。以上から，

$$
\begin{aligned}
\alpha-\beta&=\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2k}-\frac{-k+\sqrt{k^2+4}}{2k}\\
&=1
\end{aligned}
$$

である。

（答）　1

(2)

$$
\begin{aligned}
\alpha\beta&=\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2k}\cdot\frac{-k+\sqrt{k^2+4}}{2k}\\
&=\frac{\left(\sqrt{k^2+4}\right)^2-k^2}{4k^2}\\
&=\frac{1}{k^2}
\end{aligned}
$$

であるから，

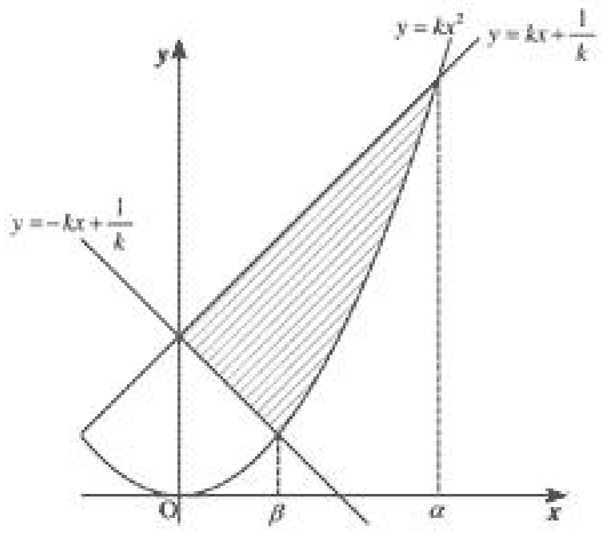
$$
\begin{aligned}
\alpha^2+\beta^2&=(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta\\
&=1^2+2\cdot\frac{1}{k^2}\\
&=1+\frac{2}{k^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha^3-\beta^3&=(\alpha-\beta)\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\right)\\
&=1\cdot\left(1+\frac{2}{k^2}+\frac{1}{k^2}\right)\\
&=1+\frac{3}{k^2}
\end{aligned}
$$

を得る。

（答）　$\alpha\beta=\dfrac{1}{k^2}$，$\alpha^2+\beta^2=1+\dfrac{2}{k^2}$，$\alpha^3-\beta^3=1+\dfrac{3}{k^2}$

(3)



上図の斜線部の面積が求める面積である。この面積を $S(k)$ とすると，

$$
\begin{aligned}
S(k)&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+k\alpha^2\right)\alpha-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+k\beta^2\right)\beta-\int_\beta^\alpha kx^2dx\\
&=\frac{\alpha-\beta}{2k}+\frac{k}{2}\left(\alpha^3-\beta^3\right)-\frac{k}{3}\left(\alpha^3-\beta^3\right)\\
&=\frac{1}{2k}+\frac{k}{6}\left(1+\frac{3}{k^2}\right)\\
&=\frac{k}{6}+\frac{1}{k}
\end{aligned}
$$

である。$k>0$ より，相加・相乗平均の関係から，

$$S(k)=\frac{k}{6}+\frac{1}{k}\geqq 2\sqrt{\frac{k}{6}\cdot\frac{1}{k}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

であるから，

$$\min S(k)=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

である。等号成立は，

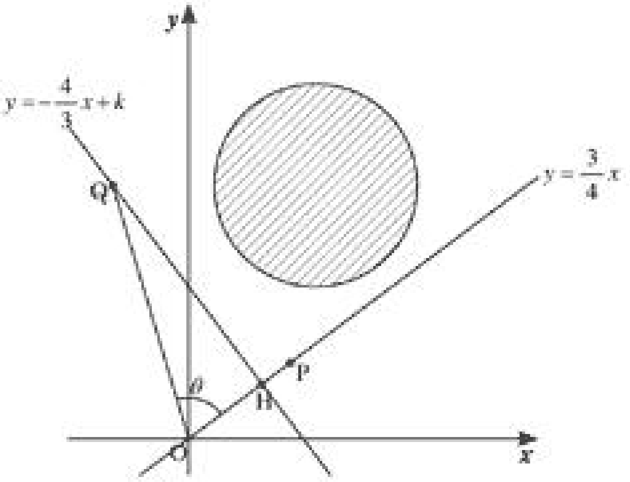
$$
\begin{aligned}
&\frac{k}{6}=\frac{1}{k}\\
&\Leftrightarrow k=\sqrt{6}
\end{aligned}
$$

である。

（答）　$k=\sqrt{6}$，$\min S(k)=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

〔2〕

(1)



直線 $y=-\frac{4}{3}x+k$ と $y=\frac{3}{4}x$ との交点を H とすると、

$$H\left(\frac{12}{25}k,\ \frac{9}{25}k\right)$$

である。ここで、

$$\left|\overrightarrow{OP}\right|=5,\ \left|\overrightarrow{OH}\right|=\frac{3}{5}|k|$$

であるから、

$$\angle POQ=\theta \quad (0\leqq\theta\leqq\pi)$$

と置くと、$\angle POQ=\theta$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OP}&=\left|\overrightarrow{OQ}\right|\left|\overrightarrow{OP}\right|\cos\theta\\&=\left|\overrightarrow{OP}\right|\left|\overrightarrow{OH}\right|\\&=5\cdot\frac{3}{5}k\\&=3k\end{aligned}$$

(答)　$3k$

(2)

点 R は円：$(x-5)^2+(y-10)^2=16$ の円周上の点として調べ、

内積 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR}$ を考えればよい。点 R の座標は、

$$R\ (4\cos\varphi+5,\ 4\sin\varphi+10)\quad(\varphi\text{ は実数})$$

と表すことができるので、

$$I=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR}$$

と決めると、

$$\begin{aligned}I&=(4,\ 3)\cdot(4\cos\varphi+5,\ 4\sin\varphi+10)\\&=16\cos\varphi+20+12\sin\varphi+30\\&=4(3\sin\varphi+4\cos\varphi)+50\\&=20\sin(\varphi+\alpha)+50\end{aligned}$$

である。ただし α は

$$\cos\alpha=\frac{3}{5},\ \sin\alpha=\frac{4}{5}$$

を満たす実数である。φ は実数全体を動けるから、

$$-1\leqq\sin(\varphi+\alpha)\leqq1$$

$$\Leftrightarrow -20\leqq20\sin(\varphi+\alpha)\leqq20$$

$$\Leftrightarrow 30\leqq I\leqq70$$

である。

(答)　最大値：70　最小値：30

〔3〕

問の条件より，$P(x)$ を $x-3$ で割った余りが $10-6p$ であるので，$P(3)=10-6p$ である。

$$P(3)=27-9(2p+a)+3(2ap+1)-a=10-6p$$
$$\Leftrightarrow 3ap-5a-6p+10=0$$
$$\Leftrightarrow (a-2)\left(p-\frac{5}{3}\right)=0 \qquad \cdot\cdot\cdot ①$$

(1)

$$P(x)=(x-a)(x^2-2px+1)$$

と因数分解できる。

$x^2-2px+1$ が実数の範囲でさらに因数分解できると仮定すると，$P(x)=0$ の実数解が a のみであるという条件より，

$$x^2-2px+1=(x-a)^2$$

である必要がある。係数を比較して解いて，$p=a=1$ または $p=a=-1$ のいずれか。これらはいずれも①を満たさず矛盾する。結局 $x^2-2px+1$ は実数の範囲でこれ以上因数分解できないことが分かる。

(答)　$P(x)=(x-a)(x^2-2px+1)$

(2)

(1)より，$x^2-2px+1=0$ は実数解を持たない。すなわち，この2次方程式の判別式を D_1 として，

$$\frac{D_1}{4}=p^2-1<0$$
$$\Leftrightarrow -1<p<1 \qquad \cdot\cdot\cdot ②$$

が成り立つ。①，②より，$a=2$

(答)　$a=2$

(3)

(2)の結果より，

$$P(x)=x^3-2(p+1)x^2+(4p+1)x-2$$

である。

$$P'(x)=3x^2-4(p+1)x+4p+1=0$$

が異なる2実数解を持たなければよいから，この2次方程式の判別式を D_2 と置くと，

$$\frac{D_2}{4}=\{2(p+1)\}^2-3(4p+1)$$
$$=4p^2-4p+1$$
$$=(2p-1)^2$$

より，

$$(2p-1)^2\leqq 0$$

$$\Leftrightarrow p=\frac{1}{2}$$

を得る。これは，②を満たす。

(答)　$p=\frac{1}{2}$

〔4〕

(1)

3人の玉の取り出し方は

$n\cdot n\cdot n=n^3$(通り)

である。勝者が3人とは，3人の得点が一致するような玉の取り出し方で，

n(通り)

である。よって，

$$P_n(3)=\frac{n}{n^3}=\frac{1}{n^2}$$

である。

(答)　$P_n(3)=\dfrac{1}{n^2}$

(2)

勝者が2人となるとき，どの2人が勝者となるかで，

${}_3C_2=3$(通り)

ある。この各々に対して，

[1]　2人の勝者の取り出した玉に書かれた数字が2のとき
残りの1人は1と書かれた玉を取り出すので，このような取り出しかたは1通りである。

[2]　2人の勝者の取り出した玉に書かれた数字が3のとき
残りの1人は1または2と書かれた玉を取り出すので，このような取り出し方は2通りである。

以上から，

$$P_3(2)=\frac{{}_3C_2\cdot 3}{3^3}=\frac{1}{3}$$

である。

(答)　$P_3(2)=\dfrac{1}{3}$

(3)

Aがk点$(k\geqq 2)$で1人勝ちする確率は，

$$\frac{{}_{k-1}C_1\cdot{}_{k-1}C_1}{n^3}=\frac{(k-1)^2}{n^3}$$

である。よって，誰か1人が勝つ確率は，

$$\begin{aligned}P_n(1)&=\sum_{k=2}^{n}\frac{3(k-1)^2}{n^3}\\&=\frac{3}{n^3}\sum_{k=2}^{n}(k^2-2k+1)\\&=\frac{3}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k^2-2k+1)\\&=\frac{3}{n^3}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n\right\}\\&=\frac{3}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)\\&=\frac{(n-1)(2n-1)}{2n^2}\end{aligned}$$

である。

(答)　$\dfrac{(n-1)(2n-1)}{2n^2}$　$(n\geqq 2)$

〔５〕

(1)

$$x=4k+1,\ y=4l+1\ (k,\ l\text{は0以上の整数})$$

ならば，

$$xy=(4k+1)(4l+1)$$
$$=4(4kl+k+l)+1$$

である。これは xy が 4 で割ると 1 余る整数であることを示している。

(証明終)

(2)

「$3^{2i}=4N+1$（i，N はともに 0 以上の整数）」

であることを数学的帰納法で証明する。

[1]　$i=0$ のとき

$$3^0=1$$

より成立。

[2]　$i=j$　$(j\geq 0)$ で成立を仮定する

このとき，

$$3^{2j}=4N+1$$

が成立し，ここで，

$$3^{2(j+1)}=3^{2j}\cdot 3^2$$
$$=9\cdot(4N+1)$$
$$=4(9N+2)+1$$

であるから，$i=j+1$ でも成立する。

以上[1], [2]より題意は示された。

(証明終)

(3)

「$3^{2i+1}=4M+3$（i，M は 0 以上の整数）」

であることを数学的帰納法で示す。

[1]　$i=0$ のとき

$$3^1=3$$

より成立。

[2]　$i=j$　$(j\geqq 0)$ で成立を仮定する

このとき，

$$3^{2j+1}=4M+3$$

が成立し，ここで，

$$3^{2(j+1)+1}=3^{2j+1}\cdot 3^2$$
$$=9\cdot(4M+3)$$
$$=4(9M+6)+3$$

であるから，$i=j+1$ でも成立する。

以上[1], [2]より題意は示された。

(証明終)

(4)

求める和を T と置くと，

$$T=3^0+3^2+\cdots+3^{2m}\quad(\because\ (2),(3)\text{の結果より})$$

であるから，

$$T=\sum_{k=0}^{m}3^{2k}$$
$$=\sum_{k=0}^{m}9^k$$
$$=\frac{9^{m+1}-1}{9-1}$$
$$=\frac{1}{8}\left(9^{m+1}-1\right)$$

である。

(答)　$\frac{1}{8}\left(9^{m+1}-1\right)$