学　力　検　査　問　題

数　　学

数学Ⅰ，数学Ⅱ
数学A，数学B

平成22年2月25日
自　9時00分
至11時00分

答案作成上の注意

1　この問題冊子には，数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学A，数学B（数列，ベクトル）の問題が**5問**あります。総ページは**11ページ**で，問題は偶数ページにあります。
2　解答用紙は**5枚**です。解答はすべて**対応する番号の解答用紙**の所定の**解答欄**（表面）に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。
3　**受験番号**は，それぞれの解答用紙の所定の欄（**2ヶ所**）に必ず記入しなさい。
4　試験終了後は，**解答用紙の右上の番号の順**に並べなさい。
5　配付した解答用紙は，持ち出してはいけません。

◇M6(628—109)

〔1〕 k は定数で，$k > 0$ とする。曲線 C : $y = kx^2$ $(x \geqq 0)$ と 2 つの直線 ℓ : $y = kx + \dfrac{1}{k}$，m : $y = -kx + \dfrac{1}{k}$ との交点の x 座標をそれぞれ α，β $(0 < \beta < \alpha)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\alpha - \beta$ の値を求めよ。

(2) $\alpha\beta$，$\alpha^2 + \beta^2$ および $\alpha^3 - \beta^3$ を k を用いて表せ。

(3) 曲線 C と 2 直線 ℓ，m とで囲まれた部分の面積を最小にする k の値を求めよ。また，そのときの面積を求めよ。

空　白

〔２〕 座標平面上に点 O(0, 0) と点 P(4, 3) をとる。不等式 $(x-5)^2+(y-10)^2 \leqq 16$ の表す領域を D とする。次の問いに答えよ。

(1) k は定数とする。直線 $y=-\dfrac{4}{3}x+k$ 上の点を Q とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を k を用いて表せ。

(2) 点 R が D 全体を動くとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ の最大値および最小値を求めよ。

空 白

〔3〕　p，aを実数の定数とする。多項式 $P(x)=x^3-(2p+a)x^2+(2ap+1)x-a$ を $x-3$ で割った余りが $10-6p$ であり，3次方程式 $P(x)=0$ の実数解は a のみとする。次の問いに答えよ。

(1) 実数の範囲で $P(x)$ を因数分解せよ。

(2) a の値を求めよ。

(3) 関数 $y=P(x)$ が極値をもたないときの p の値を求めよ。

空　白

〔４〕　n は 2 以上の自然数とする。袋の中に 1 から n までの数字が 1 つずつ書かれた n 個の玉が入っている。この袋から無作為に玉を 1 個取り出し，それに書かれている数を自分の得点としたのち，取り出した玉を袋に戻す。この試行を A，B，C の 3 人が順に行い，3 人の中で最大の得点の人を勝者とする。たとえば，A，B，C の得点がそれぞれ 4，2，4 のときは A と C の 2 人が勝者であり，3 人とも同じ得点のときは A，B，C の 3 人とも勝者である。勝者が k 人 $(k = 1, 2, 3)$ である確率を $P_n(k)$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) 勝者が 3 人である確率 $P_n(3)$ を n を用いて表せ。

(2) $n = 3$ の場合に勝者が 2 人である確率 $P_3(2)$ を求めよ。

(3) 勝者が 1 人である確率 $P_n(1)$ を n を用いて表せ。

空　白

〔5〕 次の問いに答えよ。

(1) x，y が4で割ると1余る自然数ならば，積 xy も4で割ると1余ることを証明せよ。

(2) 0以上の偶数 n に対して，3^n を4で割ると1余ることを証明せよ。

(3) 1以上の奇数 n に対して，3^n を4で割った余りが1でないことを証明せよ。

(4) m を0以上の整数とする。3^{2m} の正の約数のうち4で割ると1余る数全体の和を m を用いて表せ。