

[1]

(1) $a = b = -1$ より

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \therefore \underline{P\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)} \dots\dots(\text{答})$$

(2) ケーリー・ハミルトンの公式より, $A = \begin{pmatrix} a & 2-a \\ 1+a & 2 \end{pmatrix}$ に対して,

$$A^2 - (a+2)A + (a^2 + a - 2)E = O \dots\dots ①$$

これと $A^2 = kE$ (k : 実数) を連立して,

$$(a+2)A = (a^2 + a - 2 + k)E \dots\dots ②$$

(i) $a = -2$ のとき, ②より, $4 - 2 - 2 + k = 0 \therefore k = 0$

(ii) $a \neq -2$ のとき, $A = \frac{a^2 + a - 2 + k}{a+2} E = \alpha E$ (α : 実数) と表せる.

ところが, $A = \begin{pmatrix} a & 2-a \\ 1+a & 2 \end{pmatrix}$ の $2-a=0$ かつ $1+a=0$ を同時に満たす

実数 a は存在せず不適. 以上 (i), (ii) より, $a = -2, k = 0$ $\dots\dots(\text{答})$

(3) P' が原点 O に一致すると考える.

$$\begin{pmatrix} a & 2-a \\ 1+a & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b \\ -b \end{pmatrix} \dots\dots ③$$

③を満たす実数 (x, y) の組が存在しなければよい.

$$\det A = 2a - (2-a)(1+a) \quad \left[\begin{array}{l} \because \det A \neq 0 \text{ とすると } A^{-1} \text{ が存在し} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} -2b \\ -b \end{pmatrix} \text{ となり, } (x, y) \text{ が} \\ \text{存在するから} \end{array} \right]$$

$$= a^2 + a - 2 = (a+2)(a-1) = 0 \quad \therefore \underline{a = -2, 1}$$

(i) $a = -2$ のとき, ③より,

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b \\ -b \end{pmatrix} \quad \therefore -x + 2y = -b \dots\dots ④$$

④を満たす実数 (x, y) は存在するので不適.

(ii) $a = 1$ のとき, ③より,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b \\ -b \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{cases} x + y = -2b \\ x + y = -\frac{b}{2} \end{cases} \dots\dots ⑤$$

$-2b \neq -\frac{b}{2}$ ($b \neq 0$) のとき, ⑤より実数 (x, y) は存在しない.

以上(i), (ii) より, 求める条件は $a = 1, b \neq 0$ $\dots\dots(\text{答})$

[2]

(1) $\log_2 3 = \frac{m}{n}$ を満たす自然数 m, n が存在すると仮定する.

$$\text{つまり, } 2^{\frac{m}{n}} = 3 \quad \therefore 2^m = 3^n \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

このとき, (①の左辺) = 偶数, (①の右辺) = 奇数 となり矛盾.

よって, $\log_2 3 = \frac{m}{n}$ を満たす自然数 m, n は存在しない. (証明終)

(2) p, q は自然数 (ただし, $p \neq q$)

ここで, $p > q$ としても一般性は失わない.

$p \log_2 3$ と $q \log_2 3$ の小数部分が等しいと仮定する.

さらに, $p > q$ より, $p \log_2 3 > q \log_2 3$ と考えられる.

ここで, $p \log_2 3 - q \log_2 3 = k$ (k : 自然数) とおける.

$$(\text{与式}) \iff (p - q) \log_2 3 = k$$

$$\iff \log_2 3 = \frac{k}{p - q}$$

となり, (1) の結果に矛盾.

つまり, p, q は自然数 (ただし, $p \neq q$) に対して, $p \log_2 3$ と $q \log_2 3$ の小数部分は等しくない. (証明終)

(3) $2^{15} < 3^{10} < 2^{16}$ より,

$$\log_2 2^{15} < \log_2 3^{10} < \log_2 2^{16}$$

$$\iff 15 < 10 \log_2 3 < 16$$

$$\iff 1.5 < \log_2 3 < 1.6$$

これより, $\log_2 3$ の小数第 1 位の数は 5(答)

[3]

(1) 定数 k を用いて

$$f(x) = a \cos^2 x + 2b \cos x \sin x + c \sin^2 x = k \quad (x \text{ は任意の実数})$$

$x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ でも成立することが必要条件だから

$$\begin{cases} (x=0 \text{ 代入}) & a=k \\ \left(x=\frac{\pi}{4} \text{ 代入}\right) & \frac{a}{2} + b + \frac{c}{2} = k \\ \left(x=\frac{\pi}{2} \text{ 代入}\right) & c=k \end{cases} \quad \therefore a=c=k, b=0$$

逆に $a=c=k$ (定数), $b=0$ のとき,

$$f(x) = k(\cos^2 x + \sin^2 x) = k \text{ (定数) となり十分条件である.}$$

以上より, $a=c, b=0$ (答)

$$(2) \quad g(x) = 4 \cos^2 x + 2 \cos x \sin x + \sin^2 x - \frac{5}{2}$$

$$= 3 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} + \sin 2x + 1 - \frac{5}{2}$$

$$= \sin 2x + \frac{3}{2} \cos 2x$$

$$= \frac{\sqrt{13}}{2} \left(\sin 2x \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} + \cos 2x \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} \right)$$

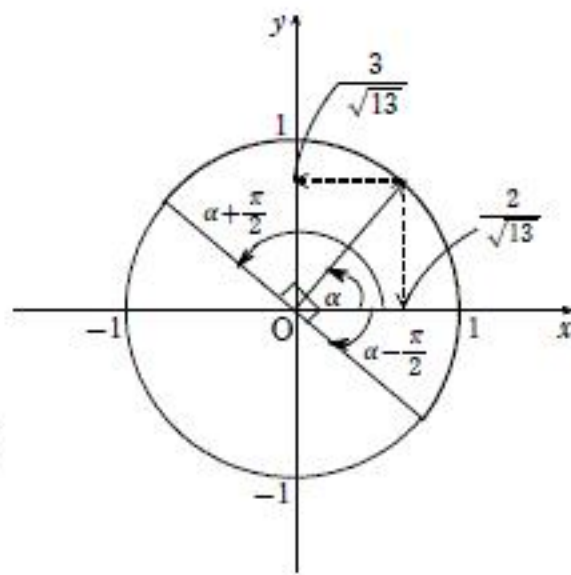
$$= \frac{\sqrt{13}}{2} \sin(2x + \alpha) \quad \left(\text{ただし, } \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}, \sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} \text{ を満たすとする} \right)$$

ここで, $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ より, $\alpha - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \alpha \leq \alpha + \frac{\pi}{2}$

$2x + \alpha = \frac{\pi}{2}$ のとき $g(x)$ は最大となるから,

$$2\theta + \alpha = \frac{\pi}{2} \quad \left(2\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

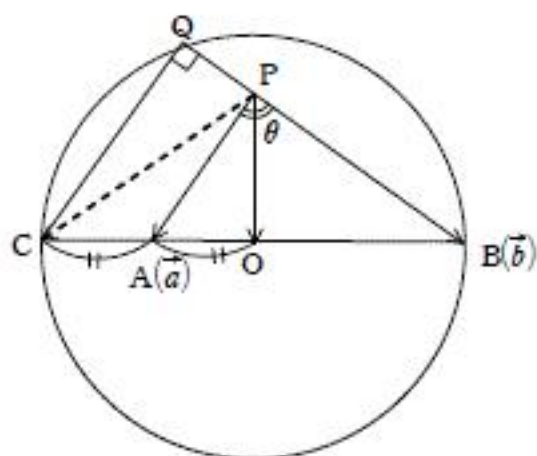
$$\text{このとき, } \begin{cases} \cos 2\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \sin 2\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}} \end{cases} \quad \text{.....(答)}$$



$$\begin{aligned} (3) \quad \int_0^{\theta} g(x) dx &= \int_0^{\theta} \frac{\sqrt{13}}{2} \sin(2x + \alpha) dx \\ &= \frac{\sqrt{13}}{2} \left[-\frac{1}{2} \cos(2x + \alpha) \right]_0^{\theta} \\ &= -\frac{\sqrt{13}}{4} (\cos(2\theta + \alpha) - \cos \alpha) \\ &= \frac{\sqrt{13}}{4} \cos \alpha \\ &= \frac{\sqrt{13}}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} \quad \left(\because \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \quad \text{.....(答)} \end{aligned}$$

[4]

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \overrightarrow{PO} &= \frac{2\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}}{1+2} = \frac{1}{3}(2\vec{a} + \vec{b}) \quad \dots\dots(\text{答}) \\
 \overrightarrow{PC} &= \frac{-4\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}}{1-4} = \frac{1}{3}(4\vec{a} - \vec{b}) \quad \dots\dots(\text{答}) \\
 \overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PO} = \vec{b} - \frac{1}{3}(2\vec{a} + \vec{b}) \\
 &= \frac{1}{3}(2\vec{b} - 2\vec{a}) = \frac{2}{3}(\vec{b} - \vec{a}) \quad \dots\dots(\text{答})
 \end{aligned}$$



$$(2) \quad \frac{\pi}{2} < \angle BPC < \pi \text{ より, } \cos \angle BPC < 0$$

$$\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} < 0$$

$$\iff \frac{1}{3}\vec{b} \cdot (4\vec{a} - \vec{b}) < 0$$

$$\iff 4\vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{b}|^2 < 0$$

$$\iff 4|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta < |\vec{b}|^2$$

$$\iff \cos\theta < \frac{|\vec{b}|}{4|\vec{a}|} \quad \text{これより題意は示された. (証明終)}$$

$$(3) \quad \overrightarrow{PQ} = k\vec{b} \quad (k: \text{実数}) \text{ と表せる. (ただし, } k < 0)$$

ここで,

$$\overrightarrow{QB} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PQ} = \vec{b} - k\vec{b} = (1-k)\vec{b}$$

$$\overrightarrow{QC} = \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{3}(4\vec{a} - \vec{b}) - k\vec{b} = \frac{4}{3}\vec{a} - \left(k + \frac{1}{3}\right)\vec{b}$$

より,

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{QB} \cdot \overrightarrow{QC} &= (1-k)\vec{b} \cdot \left\{ \frac{4}{3}\vec{a} - \left(k + \frac{1}{3}\right)\vec{b} \right\} \\
 &= \frac{4}{3}(1-k)|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta - (1-k)\left(k + \frac{1}{3}\right)|\vec{b}|^2 = 0
 \end{aligned}$$

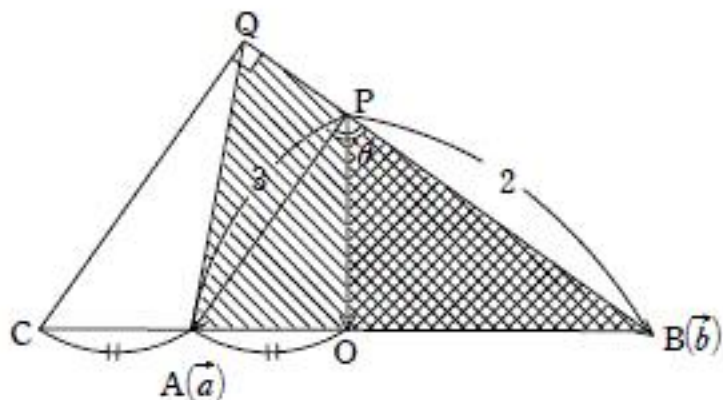
$$\iff 4(1-k)|\vec{a}|\cos\theta - (1-k)(3k+1)|\vec{b}| = 0 \quad (\because 1-k > 0)$$

$$\iff 4|\vec{a}|\cos\theta - (3k+1)|\vec{b}| = 0$$

$$\iff k = \frac{4|\vec{a}|\cos\theta}{3|\vec{b}|} - \frac{1}{3}$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = -k|\vec{b}| \text{ だから,}$$

$$\begin{aligned}
 |\overrightarrow{PQ}| &= \left| \frac{1}{3} - \frac{4|\vec{a}|\cos\theta}{3|\vec{b}|} \right| |\vec{b}| \\
 &= \frac{|\vec{b}|}{3} - \frac{4|\vec{a}|\cos\theta}{3} \\
 &= \frac{1}{3}(|\vec{b}| - 4|\vec{a}|\cos\theta) \quad \dots\dots(\text{答})
 \end{aligned}$$



$$(4) \quad (3) \text{ の } k \text{ を用いて表せば,}$$

$$\triangle QAB = \triangle POB \cdot (1-k) \cdot \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2}(1-k) = 3$$

$$\iff 1-k = 2$$

$$\iff k = -1 \quad (< 0)$$

$$\text{ここで, } |\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2, \frac{1}{3}(|\vec{b}| - 4|\vec{a}|\cos\theta) = |\vec{b}| \text{ より, } \cos\theta = -\frac{1}{3}$$

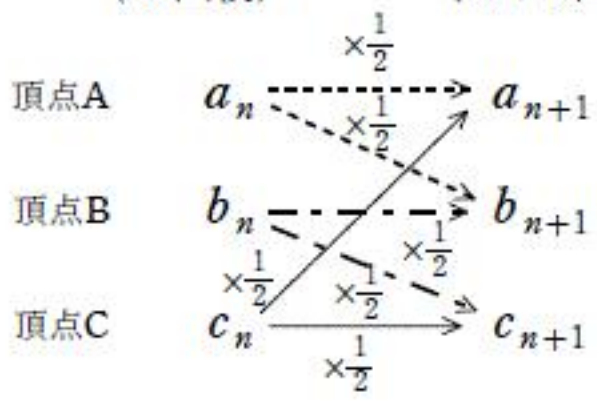
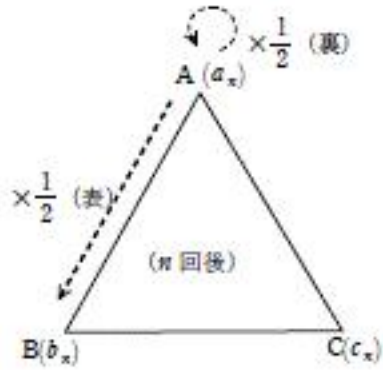
したがって,

$$\begin{aligned}
 \triangle PAB &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|\sin\theta \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} \\
 &= \underline{2\sqrt{2}} \quad \dots\dots(\text{答})
 \end{aligned}$$

[5]

(1) $a_1 = \frac{1}{2}, b_1 = \frac{1}{2}, c_1 = 0$ (答)

(2) n 回後と $n+1$ 回後の推移図を描く.
(n 回後) ($n+1$ 回後)



$$\therefore \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + c_n) \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \\ c_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + c_n) \end{cases} \text{(答)①}$$

(1) の結果と ① を用いて,

$$\begin{cases} a_2 = \frac{1}{4}, b_2 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{4} \\ a_3 = \frac{1}{4}, b_3 = \frac{3}{8}, c_3 = \frac{3}{8} \end{cases} \text{(答)}$$

(3) 「 $a_n = b_n$ または $b_n = c_n$ または $c_n = a_n$ ($n \geq 1$)」(*) を示す.

- (I) $n=1$ のとき $a_1 = b_1 = \frac{1}{2}$ より成立.
 (II) $n=k$ で成立を仮定する. つまり,
 $a_k = b_k$ または $b_k = c_k$ または $c_k = a_k$ とする.

ここで,

$$\begin{aligned} a_{k+1} - b_{k+1} &= \frac{1}{2}(a_k + c_k) - \frac{1}{2}(a_k + b_k) = \frac{1}{2}(c_k - b_k) \\ b_{k+1} - c_{k+1} &= \frac{1}{2}(a_k + b_k) - \frac{1}{2}(b_k + c_k) = \frac{1}{2}(a_k - c_k) \\ c_{k+1} - a_{k+1} &= \frac{1}{2}(b_k + c_k) - \frac{1}{2}(a_k + c_k) = \frac{1}{2}(b_k - a_k) \end{aligned}$$

↖ ↗ ↘

仮定より
少なくとも1つは
0となる

これより, $a_{k+1} = b_{k+1}$ または $b_{k+1} = c_{k+1}$ または $c_{k+1} = a_{k+1}$ となり,
 $n = k+1$ でも (*) は成立.
 以上 (I) (II) より (*) は示された. (証明終)

(4) a_n, b_n, c_n のうち一致する2つの確率が p_n なら, 残りの1つは $1-2p_n$

(2) の結果を用いて

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{1}{2}\{p_n + (1-2p_n)\} \\ \iff p_{n+1} &= -\frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2} \\ \iff p_{n+1} - \frac{1}{3} &= -\frac{1}{2}\left(p_n - \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

数列 $\left\{p_n - \frac{1}{3}\right\}$ は, 初項 $p_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, 公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列なので,

$$\begin{aligned} \therefore p_n - \frac{1}{3} &= \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ \iff p_n &= \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} \quad (n \geq 1) \text{(答)} \end{aligned}$$