

[1]

(1) $\frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} = 3.73\ldots = a + b$ より

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = \sqrt{3} - 1 \end{cases}$$

ここで,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2-\sqrt{3}} &< \frac{6}{3} + \frac{k}{\sqrt{3}-1} \\ \Leftrightarrow 2 + \sqrt{3} &< 2 + \frac{k}{\sqrt{3}-1} \\ \Leftrightarrow k &> 3 - \sqrt{3} \quad \therefore \underline{k > 3 - \sqrt{3}} \quad \text{.....(答)} \end{aligned}$$

(2) $f(x) = ax^2 - 2x + b$ ($a > 0, -1 \leq x \leq 2$)
 $f(-1) < f(2) \Leftrightarrow a + b + 2 < 4a + b - 4 \quad \therefore 2 < a$

ここで, $f(x) = a\left(x - \frac{1}{a}\right)^2 + b - \frac{1}{a}$

(軸) $= \frac{1}{a}$ について, $0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{2}$ と表せるから $y = f(x)$ は下図の通り.

$$\begin{cases} \text{(最大値)} = f(2) = 4a + b - 4 = 7 \\ \text{(最小値)} = f\left(\frac{1}{a}\right) = b - \frac{1}{a} = -1 \end{cases}$$

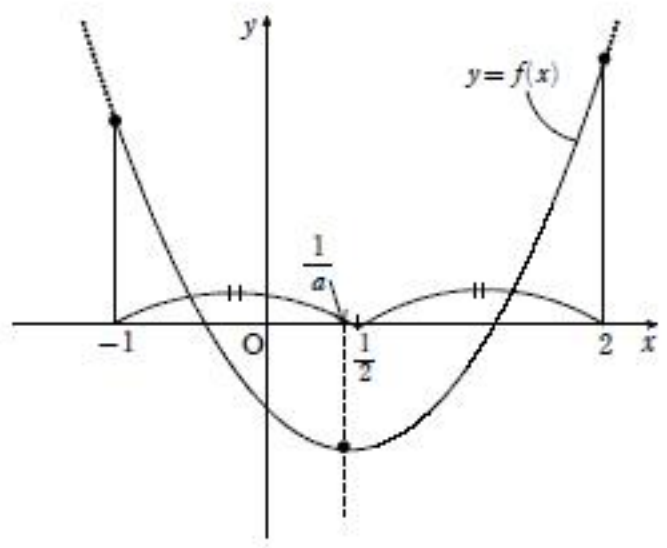
2つを連立して

$$\begin{aligned} 4a + \frac{1}{a} - 1 &= 11 \Leftrightarrow 4a^2 - 12a + 1 = 0 \\ \therefore a &= \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2} \quad (> 2) \end{aligned}$$

さらに,

$$4 \cdot \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2} + b = 11 \Leftrightarrow b = 5 - 4\sqrt{2}$$

以上より, $\underline{a = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2}, b = 5 - 4\sqrt{2}} \quad \text{.....(答)}$



[2]

(1) $\log_2 3 = \frac{m}{n}$ を満たす自然数 m, n が存在すると仮定する.

$$\text{つまり, } 2^{\frac{m}{n}} = 3 \quad \therefore 2^m = 3^n \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(①の左辺) = 偶数, (①の右辺) = 奇数 となり矛盾.

よって, $\log_2 3 = \frac{m}{n}$ を満たす自然数 m, n は存在しない. (証明終)

(2) p, q は自然数 (ただし, $p \neq q$)

ここで, $p > q$ としても一般性は失わないので,

$p \log_2 3$ と $q \log_2 3$ の小数部分が等しいと仮定する.

さらに, $p > q$ より, $p \log_2 3 > q \log_2 3$ と考えられる.

ここで, $p \log_2 3 - q \log_2 3 = k$ (k : 自然数) とおくと,

$$(\text{与式}) \iff (p - q) \log_2 3 = k$$

$$\iff \log_2 3 = \frac{k}{p - q} \quad (p > q)$$

となり, (1) の結果より矛盾.

つまり, p, q は自然数 (ただし, $p \neq q$) に対して, $p \log_2 3$ と $q \log_2 3$ の小数部分は等しくないことが示された. (証明終)

(3) $2^{15} < 3^{10} < 2^{16}$ より,

$$\log_2 2^{15} < \log_2 3^{10} < \log_2 2^{16}$$

$$\iff 15 < 10 \log_2 3 < 16$$

$$\iff 1.5 < \log_2 3 < 1.6$$

これより, $\log_2 3$ の小数第 1 位の数は 5 である. $\dots\dots$ (答)

[3]

(1) l の傾きは $y' = x+1$ より, -1

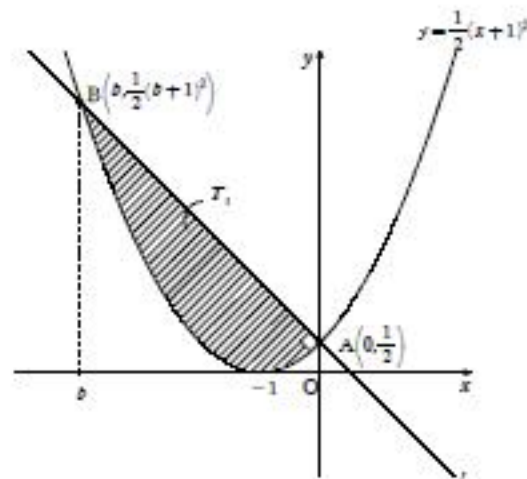
$$l: y = -x + \frac{1}{2} \quad \dots\dots(\text{答})$$

これと, $y = \frac{1}{2}(x+1)^2$ を連立して

$$y = \frac{1}{2}(x+1)^2 = -x + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+4) = 0 \quad \therefore x = 0, -4 \quad \therefore \underline{b = -4} \quad \dots\dots(\text{答})$$



$$\begin{aligned} (2) \quad T_1 &= \int_{-4}^0 \left\{ -x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x+1)^2 \right\} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-4}^0 x(x+4) dx = \frac{1}{12} \cdot 4^3 = \underline{\underline{\frac{16}{3}}} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

(3) 2点 A, B の中点を O' とすると, $O'(-2, \frac{5}{2})$

円の半径 (r) が $r = \frac{1}{2}AB = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ の円は,

$$(x+2)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 8 \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

①と $y = \frac{1}{2}(x+1)^2$ を連立して

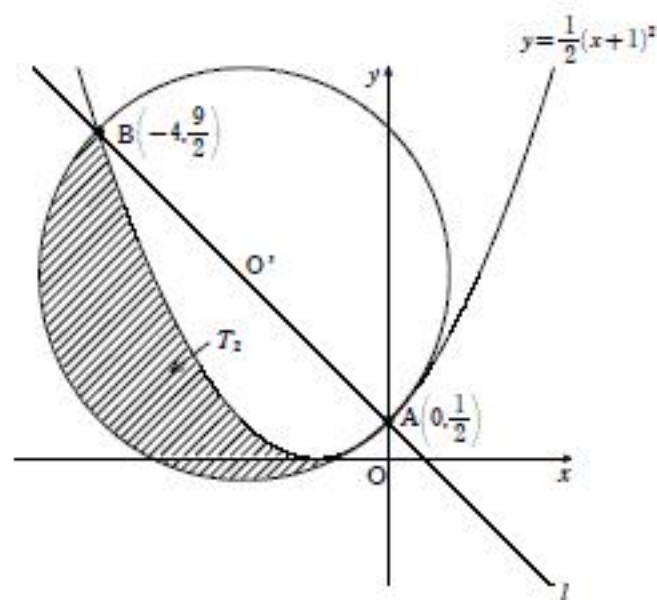
$$(x+2)^2 + \left(\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\right)^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + \frac{1}{4}x^4 + x^2 + 4 + x^3 - 4x - 2x^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4 + x^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^3(x+4) = 0 \quad \therefore x = -4, 0 \text{ のみ (円と放物線は 2 点 A, B 以外に共有点はない)}$$

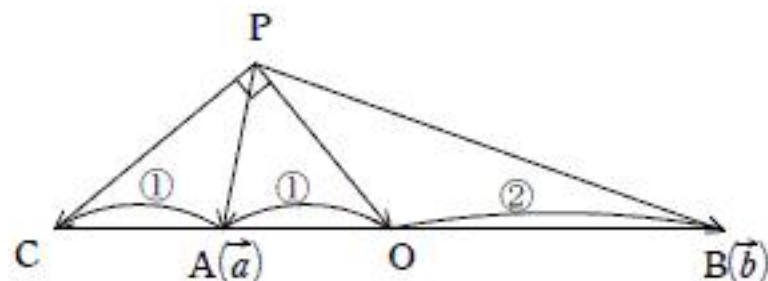
$$T_2 = (\text{半円の面積}) - T_1 = \frac{1}{2} \cdot \pi(2\sqrt{2})^2 - \frac{16}{3} = 4\pi - \frac{16}{3} \quad \dots\dots(\text{答})$$



[4]

$$(1) \quad \overrightarrow{PO} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{1+2} = \frac{1}{3}(2\vec{a} + \vec{b}) \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$\overrightarrow{PC} = \frac{-4\vec{a} + \vec{b}}{1-4} = \frac{1}{3}(4\vec{a} - \vec{b}) \quad \dots\dots(\text{答})$$



$$(2) \quad \overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PC} = \frac{1}{9}(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (4\vec{a} - \vec{b}) = 0$$

$$\iff 8|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \therefore \underline{\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}|\vec{b}|^2 - 4|\vec{a}|^2} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$(3) \quad \triangle PAB = \frac{3}{2}$$

$$\iff \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{PA}|^2 |\vec{PB}|^2 - (\vec{PA} \cdot \vec{PB})^2} = \frac{3}{2}$$

$$\iff \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - \left(\frac{1}{2}|\vec{b}|^2 - 4|\vec{a}|^2\right)^2} = 3$$

$$\iff \sqrt{|\vec{b}|^2 - \left(\frac{1}{2}|\vec{b}|^2 - 4\right)^2} = 3$$

$$\therefore |\vec{b}|^4 - 20|\vec{b}|^2 + 100 = 0 \iff (|\vec{b}|^2 - 10)^2 = 0 \quad \therefore |\vec{b}|^2 = 10$$

$$\therefore \underline{PB = |\vec{b}| = \sqrt{10}} \quad \dots\dots(\text{答})$$

[5]

$$\text{さいころ} \begin{cases} 1 \text{ or } 2 \cdots \cdots \left(\frac{1}{3}\right) \rightarrow X_k = 2 \\ 3 \text{ or } 4 \cdots \cdots \left(\frac{1}{3}\right) \rightarrow X_k = 3 \\ 5 \text{ or } 6 \cdots \cdots \left(\frac{1}{3}\right) \rightarrow X_k = 5 \end{cases} \quad (k=1, 2, 3, \dots, n)$$

$$(1) \quad p_1 = p(\text{偶}) = 1 - p(\text{奇})$$

$$= 1 - \left(\frac{4}{6}\right)^5$$

$$= 1 - \frac{32}{243}$$

$$= \frac{211}{243} \cdots \cdots (\text{答})$$

(2) 事象A さいころ (1 or 2)

事象B さいころ (3 or 4)

事象C さいころ (5 or 6)

Y が 100 の倍数のとき,

$$\begin{pmatrix} A \cdots 3 \text{ 回} \\ C \cdots 2 \text{ 回} \end{pmatrix} \text{ または } \begin{pmatrix} A \cdots 2 \text{ 回} \\ B \cdots 1 \text{ 回} \\ C \cdots 2 \text{ 回} \end{pmatrix} \text{ または } \begin{pmatrix} A \cdots 2 \text{ 回} \\ C \cdots 3 \text{ 回} \end{pmatrix}$$

であるので、各々が排反であることに注意して,

$$p_2 = \frac{5!}{3!2!} \left(\frac{1}{3}\right)^5 + \frac{5!}{2!2!} \left(\frac{1}{3}\right)^5 + \frac{5!}{2!3!} \left(\frac{1}{3}\right)^5$$

$$= \frac{50}{3^5} = \frac{50}{243} \cdots \cdots (\text{答})$$

(3) 求める期待値(E)は

$$E = (4 + 6 + 10 + 6 + 9 + 15 + 10 + 15 + 25) \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$= \frac{100}{9} \cdots \cdots (\text{答})$$

$\begin{smallmatrix} 2\text{回目} \\ 1\text{回目} \end{smallmatrix}$	$X_2=2$	$X_2=3$	$X_2=5$
$X_1=2$	4	6	10
$X_1=3$	6	9	15
$X_1=5$	10	15	25