1

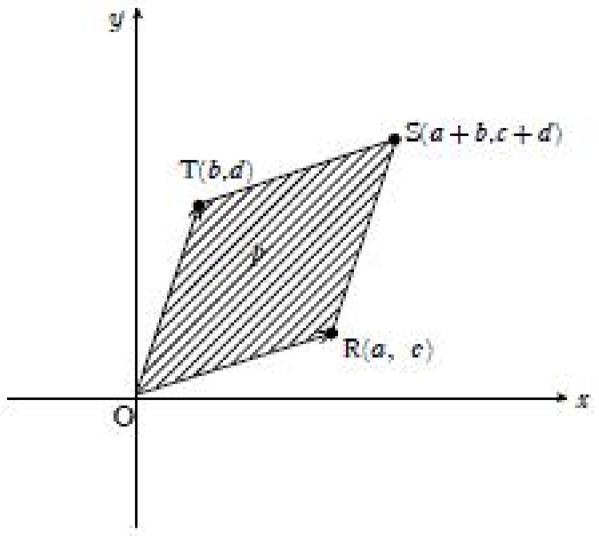
(1) $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b\\c+d\end{pmatrix}$ より，$\mathrm{P}'(a+b,\ c+d)$

$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a+2b\\2c+2d\end{pmatrix}$ より，$\mathrm{Q}'(2a+2b,\ 2c+2d)$

条件より，

$$\begin{cases}1\leqq a+b\leqq 2 & \cdots\cdots①\\ 1\leqq 2a+2b\leqq 2\\ 1\leqq c+d\leqq 2\\ 1\leqq 2c+2d\leqq 2 & \cdots\cdots②\end{cases}\qquad \therefore\ \begin{cases}\dfrac{1}{2}\leqq a+b\leqq 1\\ \dfrac{1}{2}\leqq c+d\leqq 1\end{cases}\quad\cdots\cdots③$$

①，②，③より，　$\underline{a+b=1,\ c+d=1}$



(2)（1）の結果より，$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-b & b\\ c & 1-c\end{pmatrix}$

$$\therefore\ A=\begin{pmatrix}b\\-c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-b & b\\ c & 1-c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\-c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b-b^2-bc\\ bc-c+c^2\end{pmatrix}\quad\cdots\cdots④$$

ここで，　（▱ORST の面積）$=2\cdot\dfrac{1}{2}|ad-bc|$

$$=|(1-b)(1-c)-bc|$$
$$=|1-b-c|=1-b-c=p$$
$$(\because\ a>c\iff 1-b>c\iff 1-b-c>0)$$

④より，$A\begin{pmatrix}b\\-c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b(1-b-c)\\-c(1-b-c)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}bp\\-cp\end{pmatrix}$　　　$\therefore\ \underline{A\begin{pmatrix}b\\-c\end{pmatrix}=p\begin{pmatrix}b\\-c\end{pmatrix}}$

(3)　（2）の $A\begin{pmatrix}b\\-c\end{pmatrix}=p\begin{pmatrix}b\\-c\end{pmatrix}$ より，（1）の $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b\\c+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ より，

$$A^n\begin{pmatrix}b\\-c\end{pmatrix}=p^n\begin{pmatrix}b\\-c\end{pmatrix},\ A^n\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

これより，$A^n\begin{pmatrix}1 & b\\ 1 & -c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & p^nb\\ 1 & -p^nc\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix}$ だから，

$$\underline{\begin{cases}a_n=1\\ b_n=bp^n\\ c_n=1\\ d_n=-cp^n\end{cases}}$$

(4)（3）の結果を用いて，$A^3\begin{pmatrix}1 & b\\ 1 & -c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & bp^3\\ 1 & -cp^3\end{pmatrix}$

$$\iff \frac{1}{27}\begin{pmatrix}14 & 13\\ 13 & 14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & b\\ 1 & -c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & bp^3\\ 1 & -cp^3\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases}14b-13c=27bp^3 & \cdots\cdots⑤\\ 13b-14c=-27cp^3 & \cdots\cdots⑥\end{cases}$$

⑤−⑥：$b+c=27p^3(b+c)$

$\therefore\ 1=27p^3$　$(\because\ b+c>0)$

$\therefore\ \underline{p^3=\dfrac{1}{27}\ \left(p=\dfrac{1}{3}\right)}$

このとき，⑤，⑥より，$b=c=\dfrac{1}{3}$　$\left(\because\ 1-b-c=\dfrac{1}{3}\iff 2b=\dfrac{2}{3}\right)$

$$\therefore\ \underline{A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3}\\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3}\end{pmatrix}}$$

2

(1)　$x_n=a$ より，$f(a)=a$

$$\Longleftrightarrow a^3-3a^2+3a=a$$

$$\Longleftrightarrow a(a-1)(a-2)=0 \qquad \therefore\ \underline{a=0,1,2}$$

(2)「$x_n<1\ (n=1,2,3,\cdots)$」―（※）を数学的帰納法で示す．

（Ⅰ）$n=1$ のとき　$x_1=a<1$（条件より）となり成立．

（Ⅱ）$n=k$ で成立を仮定　つまり，$x_k<1$ とする．

$$x_{k+1}=f(x_k)=x_k{}^3-3x_k{}^2+3x_k\underline{\underline{-1+1}}$$

$$=\underbrace{\underline{\underline{(x_k-1)^3}}}_{(-)}+1<1$$

$n=k$ で成立すれば，$n=k+1$ でも成立．

以上(Ⅰ)(Ⅱ)より，(※)は成立．∴ $\underline{x_n<1\ (n=1,2,3\cdots)\text{は示された}}$　(証明終)

(3) $x_1=a>0$ であることと，$x_k>0$ のとき，$x_{k+1}=\underbrace{3x_k}_{(+)}\underbrace{(1-x_k)}_{(+)}+\underbrace{x_k{}^3}_{(+)}>0$

(2)より $x_k<1$ だから

これより，帰納的に $x_n>0$

(2)と合わせて，$\underline{\underline{0<x_n<1}}$　$(0<a<1)$

ここで，

$$x_{n+1}-x_n=x_n{}^3-3x_n{}^2+3x_n-x_n$$

$$=x_n(x_n{}^2-3x_n+2)$$

$$=x_n(x_n-1)(x_n-2)$$

$$=\underbrace{x_n}_{(+)}\underbrace{(1-x_n)}_{(+)}\underbrace{(2-x_n)}_{(+)}>0 \qquad \therefore\ \underline{x_n<x_{n+1}\ (n=1,2,3,\cdots)}\quad\text{(証明終)}$$

3

（1）

$$f(x)=\frac{e^x}{1+e^x}=\frac{1+e^x-1}{1+e^x}=1-\frac{1}{1+e^x}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{1+e^x}\right)=\underline{1}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=\frac{0}{1}=\underline{0}$$

（2）

$$f'(x)=\frac{e^x\left(1+e^x\right)-e^x\cdot e^x}{\left(1+e^x\right)^2}=\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}>0$$

$$f''(x)=\frac{e^x\left(1+e^x\right)^2-e^x\cdot 2\left(1+e^x\right)\cdot e^x}{\left(1+e^x\right)^4}$$

$$=\frac{e^x\left(1+e^x\right)\left(1-e^x\right)}{\left(1+e^x\right)^4}$$

増減表を描くと下記の通り．

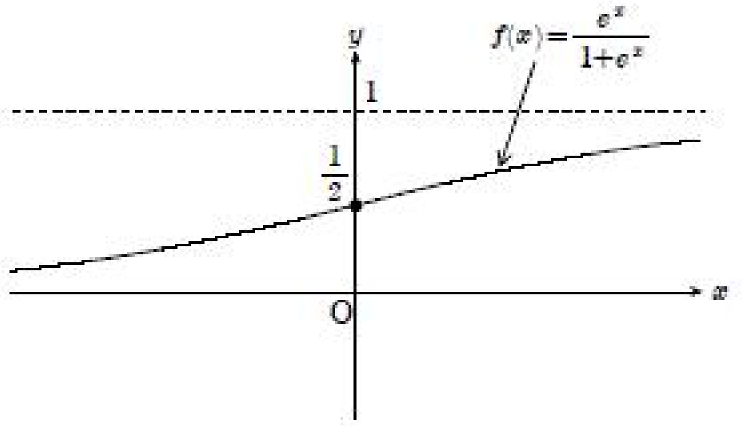
x	$(-\infty)$	$\cdots$	0	$\cdots$	$(+\infty)$
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	(0)	↗	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$	↗	(1)
			変曲点		

（1）の結果より，

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=1,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$

$$\underline{変曲点\left(0,\frac{1}{2}\right)}$$

グラフを描くと右図の通り．



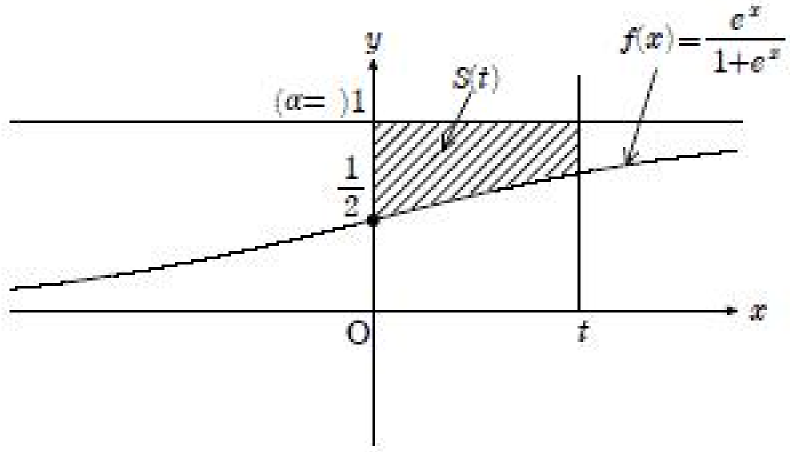
（3）

$$f(t)=t\cdot 1-\int_0^t f(x)dx$$

$$=t-\int_0^t\frac{e^x}{1+e^x}dx$$

$$=t-\left[\log\left(1+e^x\right)\right]_0^t$$

$$=\underline{t-\log\left(1+e^t\right)+\log 2}$$



（4）

$$\lim_{t\to\infty} S(t)=\lim_{t\to\infty}\left\{t-\log\left(1+e^t\right)+\log 2\right\}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left\{\log e^t-\log\left(1+e^t\right)\right\}+\log 2$$

$$=\lim_{t\to\infty}\log\underbrace{\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)}_{\to 1}+\log 2$$

$$=\underline{\log 2}$$

4

（1） $(\cos\theta)\overrightarrow{OA}+(\sin\theta)\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OC}$ より，

$$\left|(\cos\theta)\overrightarrow{OA}+(\sin\theta)\overrightarrow{OB}\right|^2=\left|\overrightarrow{OC}\right|^2$$

$$\left(\because \left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|=1\right)$$

$$\Longleftrightarrow \cos^2\theta+\sin^2\theta+\underbrace{(2\sin\theta\cos\theta)}_{(+)}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1$$

$$\therefore\ \underline{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0\ \left(\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}\right)}$$ （証明終）

（2）

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA}&=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}\\&=(\cos\theta+1)\overrightarrow{OA}+(\sin\theta)\overrightarrow{OB}\\\overrightarrow{CB}&=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\\&=(\cos\theta)\overrightarrow{OA}+(\sin\theta+1)\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

$$\therefore\ \left|\overrightarrow{CA}\right|^2=(\cos\theta+1)^2+\sin^2\theta\quad\left(\because\ \left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=1,\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0\right)$$

$$=2+2\cos\theta$$

$$=4\cos^2\frac{\theta}{2}\qquad\therefore\ \underline{\left|\overrightarrow{CA}\right|=2\cos\frac{\theta}{2}}\ (>0)$$

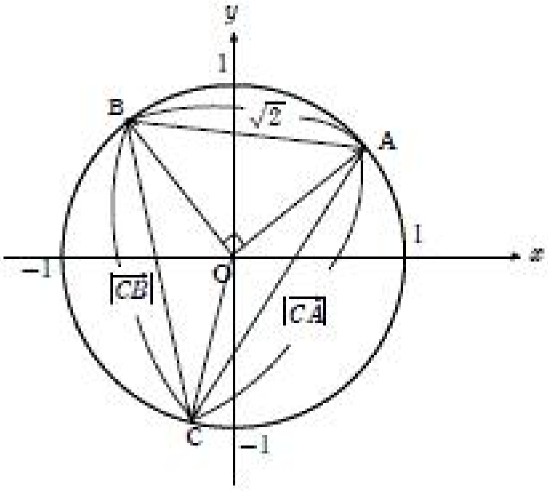
$$\therefore\ \left|\overrightarrow{CB}\right|^2=\cos^2\theta+(\sin\theta+1)^2$$

$$=2+2\sin\theta$$

$$=2+2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$=4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\qquad\therefore\ \underline{\left|\overrightarrow{CB}\right|=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}\ (>0)$$

（3） $L(\theta)=\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA}\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおく．



$$L(\theta)=2\cos\frac{\theta}{2}+2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)+\sqrt{2}$$

$$=2\cdot2\cos\frac{\frac{\theta}{2}+\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}{2}\cos\frac{\frac{\theta}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}{2}+\sqrt{2}$$

$$=\underbrace{4\cos\frac{\pi}{8}}_{(+)}\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}\right)+\sqrt{2}$$

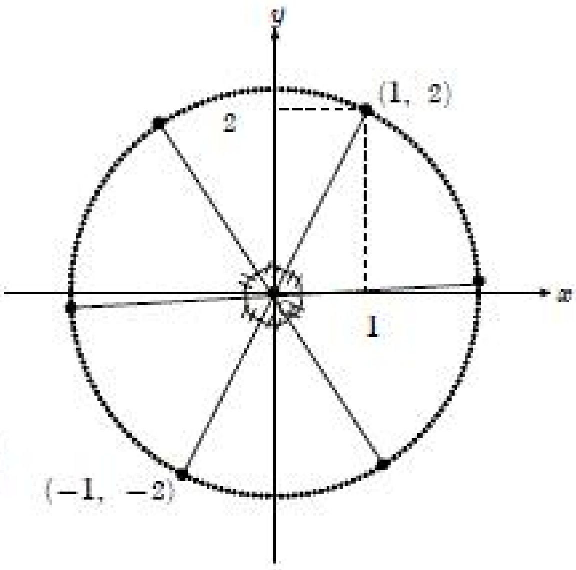
ここで，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より，$-\frac{\pi}{8}<\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{8}$

よって，$\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}=0\ \left(\theta=\frac{\pi}{4}\right)$ のとき $L(\theta)$ は最大値をとる．

$$\therefore\ \underline{\theta=\frac{\pi}{4}}$$

5

(1) さいころの目 $\begin{cases} 1 \text{ or } 2 & \cdots\cdots x \text{ 回} \\ 3 \text{ or } 4 \text{ or } 5 \text{ or } 6 & \cdots\cdots y \text{ 回} \end{cases}$



点$(1, 2)$の回転角θは、 $\theta = 120° \times x + (-60°) \times y$

$= \underline{\underline{60° \times (2x - y)}}$

出た目が$4, 1, 2 \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ より、$\theta = 60° \times (4-1) = 180°$ (回転)

$\therefore \ \underline{(-1, -2)}$

(2) $(x, y) = (1, 2), (3, 0)$のとき

$$p(1, 2) = {}_3C_1 \left(\frac{2}{6}\right)^1 \left(\frac{4}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{6}\right)^3$$

$$= \frac{3 \cdot 2 \cdot 16 + 8}{6^3} = \frac{13}{27} \qquad \therefore \ \underline{p(1, 2) = \frac{13}{27}}$$

(3)

3回の試行$(1, 2)$
- $\rightarrow (1, 2)$ $\cdots\cdots \dfrac{13}{27}$ 　$(x, y) = (1, 2), (3, 0)$のとき
- $\rightarrow (-1, -2) \cdots\cdots 1 - \dfrac{13}{27} = \dfrac{14}{27}$ 　$(x, y) = (0, 3), (2, 1)$のとき

6回の試行を3回ずつ2回に分離して考える。

$(1, 2) \rightarrow (1, 2) \rightarrow (-1, -2)$ $\cdots\cdots \dfrac{13}{27} \times \dfrac{14}{27}$

$(1, 2) \rightarrow (-1, -2) \rightarrow (-1, -2)$ $\cdots\cdots \dfrac{14}{27} \times \dfrac{13}{27}$

互いに排反より

求める確率pは、$p = \dfrac{13}{27} \times \dfrac{14}{27} + \dfrac{14}{27} \times \dfrac{13}{27} = \dfrac{364}{729}$ 　　$\therefore \ \underline{p = \dfrac{364}{729}}$

(4) $n = 3m$のときの点Pの位置は$(1, 2)$ or $(-1, -2)$のいずれかである。

点$(1, 2)$にある確率をp_m、点$(-1, -2)$にある確率を$1 - p_m$とおける。

$n = 3m$と$n = 3(m+1)$のときの推移図を描く。

	$3m$ 回		$3(m+1)$ 回
$(1, 2)$	p_m	$\xrightarrow{\times\frac{13}{27}}$	p_{m+1}
$(-1, -2)$	$1 - p_m$	$\nearrow \times\frac{14}{27}$	$1 - p_{m+1}$

これより、

$$p_{m+1} = \frac{13}{27} p_m + \frac{14}{27}(1 - p_m)$$

$$\Longleftrightarrow p_{m+1} = \frac{14}{27} - \frac{1}{27} p_m$$

$$\Longleftrightarrow p_{m+1} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{27}\left(p_m - \frac{1}{2}\right)$$

数列$\left\{p_m - \dfrac{1}{2}\right\}$は初項$p_1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{13}{27} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{54}$、公比$-\dfrac{1}{27}$の等比数列

$$\therefore \ p_m - \frac{1}{2} = -\frac{1}{54}\left(-\frac{1}{27}\right)^{m-1}$$

$$\therefore \ \underline{p_m = \frac{1}{2}\left\{1 + \left(-\frac{1}{27}\right)^m\right\}} \quad (m = 1, 2, 3, \cdots)$$