

学 力 検 査 問 題

数 学

数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲ
数学A，数学B，数学C

平成24年2月25日

自 9時00分

至 11時30分

答案作成上の注意

- 1 この問題冊子には，数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲ，数学A，数学B（数列，ベクトル），数学C（行列とその応用，式と曲線）の問題が5問あります。総ページは13ページで，問題は4ページ以降の偶数ページにあります。
- 2 解答用紙は5枚です。解答はすべて対応する番号の解答用紙の所定の解答欄（表面）に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。
- 3 受験番号は，それぞれの解答用紙の所定の欄（2ヶ所）に必ず記入しなさい。
- 4 試験終了後は，解答用紙の右上の番号の順に並べなさい。
- 5 配付した解答用紙は，持ち出してはいけません。

空 白

空 白

〔1〕 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換によって、2 点 $P(1,1)$, $Q(2,2)$ は連立不等式 $1 \leq x \leq 2$, $1 \leq y \leq 2$ の表す領域内の点 P' , Q' にそれぞれ移されるものとする。ただし、 a, b, c, d は正の実数で $a > c$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1) $a + b = 1$ および $c + d = 1$ が成り立つことを証明せよ。

(2) 4 点 $O(0,0)$, $R(a,c)$, $S(a+b,c+d)$, $T(b,d)$ を頂点とする平行四辺形 $ORST$ の面積を p とするとき、次の式が成り立つことを証明せよ。

$$A \begin{pmatrix} b \\ -c \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} b \\ -c \end{pmatrix}$$

(3) 自然数 n に対して、 a_n, b_n, c_n, d_n を

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 & b \\ 1 & -c \end{pmatrix}$$

で定める。このとき a_n, b_n, c_n, d_n を b, c, n および (2) の p を用いて表せ。

(4) $A^3 = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}$ となるように A を定めよ。

空白

〔2〕 a を実数とし、 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ とおく。数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。次の問いに答えよ。

- (1) すべての自然数 n について $x_n = a$ となるとき、 a を求めよ。
- (2) $a < 1$ のとき、 $x_n < 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを証明せよ。
- (3) $0 < a < 1$ のとき、 $x_n < x_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを証明せよ。

空 白

〔3〕 関数 $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ について、次の問いに答えよ。ただし、 e は自然対数の底である。

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ の値を求めよ。

(2) 関数 $y = f(x)$ の増減、グラフの凹凸および変曲点を調べ、グラフの概形をかけ。

(3) $\alpha = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ とおく。正の実数 t に対して、曲線 $y = f(x)$, 3 直線 $x = t$, $x = 0$ および $y = \alpha$ で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ。

(4) $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t)$ の値を求めよ。

空 白

- [4] $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。原点 O を中心とする単位円周上の異なる 3 点 A, B, C が条件

$$(\cos \theta) \overrightarrow{OA} + (\sin \theta) \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$$

を満たすとする。次の問いに答えよ。

- (1) 2 つのベクトル $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ は垂直であることを証明せよ。
- (2) $|\overrightarrow{CA}|, |\overrightarrow{CB}|$ を θ を用いて表せ。
- (3) 三角形 ABC の周の長さ $AB + BC + CA$ を最大にする θ を求めよ。

空 白

〔5〕 n は自然数とし、点 P は次の規則にしたがって座標平面上を動くとする。

規則：

(A) P は、はじめに点 $(1, 2)$ にある。

(B) さいころを投げて 2 以下の目が出れば P は原点を中心に反時計回りに 120° 回転し、3 以上の目が出れば時計回りに 60° 回転する。

(C) (B) を n 回繰り返す。

ただし、さいころの目の出方は同様に確からしいとする。次の問いに答えよ。

(1) $n = 3$ のとき、出た目が 4, 1, 2 であったとする。このとき P が最後に移った点の座標を求めよ。

(2) $n = 3$ のとき、 P が点 $(1, 2)$ にある確率を求めよ。

(3) $n = 6$ のとき、 P が点 $(-1, -2)$ にある確率を求めよ。

(4) $n = 3m$ のとき、 P が点 $(1, 2)$ にある確率を求めよ。ただし、 m は自然数とする。

空 白

