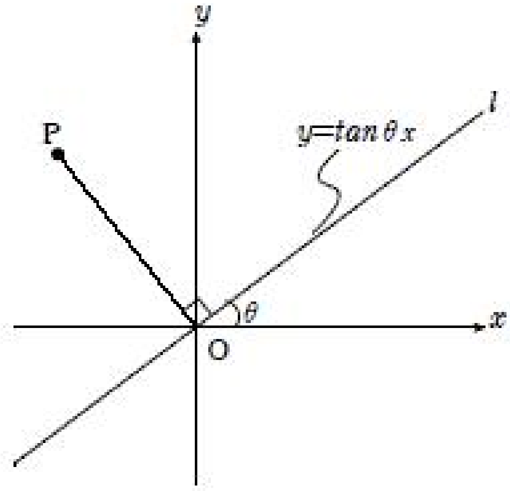
[1]

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k(-\sin\theta,\ \cos\theta)$ $(k\neq 0)$ と表せるから，

点P $(-k\sin\theta,\ k\cos\theta)$ の像 $(x',\ y')$ は



$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta\\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-k\sin\theta\\ k\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$=k\begin{pmatrix}-\sin\theta\cos^2\theta+\sin\theta\cos^2\theta\\ -\sin^2\theta\cos\theta+\sin^2\theta\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

よって，点Pの像は原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ （答）

(2) 座標平面上の任意の点Qを $(x,\ y)$ とする．その点Qの像が R $(x',\ y')$ より，

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta\\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}x\cos^2\theta+y\sin\theta\cos\theta\\ x\sin\theta\cos\theta+y\sin^2\theta\end{pmatrix}$$

$$=(x\cos\theta+y\sin\theta)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

ここで，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right|^2=x^2+y^2-(x\cos\theta+y\sin\theta)^2$$

$$=x^2(1-\cos^2\theta)+y^2(1-\sin^2\theta)-2xy\sin\theta\cos\theta$$

$$=x^2\sin^2\theta+y^2\cos^2\theta-2xy\sin\theta\cos\theta$$

$$=(x\sin\theta-y\cos\theta)^2\geqq 0$$

$\therefore\ \left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2\geqq\left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right|^2$ $\therefore\ \left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|\geqq\left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right|$ （証明終）

（等号成立は，$x\sin\theta=y\cos\theta \iff y=\tan\theta x$ つまり，点Qが l 上にあるとき成立）

(3) $\mathrm{S}(x,\ y)$ とすれば，

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta\\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$=(\cos\theta+\sin\theta)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \left|\overrightarrow{\mathrm{OS}}\right|^2=(\cos\theta+\sin\theta)^2$$

$$=\sin 2\theta+1$$

ここで，

$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$-\pi<2\theta<\pi$

$$\therefore\ 0\leqq\left|\overrightarrow{\mathrm{OS}}\right|^2\leqq 2\quad\left(0\leqq\left|\overrightarrow{\mathrm{OS}}\right|\leqq\sqrt{2}\right)$$

（最大のとき） $2\theta=\dfrac{\pi}{2}$ $\therefore\ \theta=\dfrac{\pi}{4}$

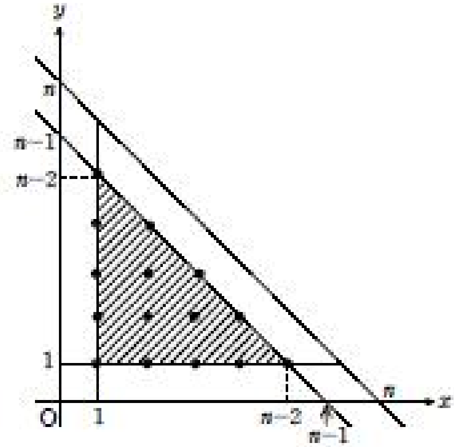
（最小のとき） $2\theta=-\dfrac{\pi}{2}$ $\therefore\ \theta=-\dfrac{\pi}{4}$

まとめて，

$$\begin{cases}(\text{最大値})=\sqrt{2} & \left(\theta=\dfrac{\pi}{4}\ \text{のとき}\right)\\ (\text{最小値})=0 & \left(\theta=-\dfrac{\pi}{4}\ \text{のとき}\right)\end{cases}$$ （答）

[2]

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-2} k=\frac{(n-2)(n-1)}{2}$ 個　　(答)



(2)

個数(N)	1	2	3	4
$p(N)$	$\dfrac{2}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$	$\dfrac{n}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$	$\dfrac{2(n-1)}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$	$\dfrac{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$

(1)より

$(n,\ 0)$と$(0,\ n)$

$(1,\ 0),\ (2,\ 0),\ (3,\ 0),\ \cdots(n-1,\ 0)$
$(0,\ 1),\ (0,\ 2),\ (0,\ 3),\ \cdots(0,\ n-1)$

$(k,\ n-k)(k=1,\ 2,\ \cdots n-1)$
とO$(0,\ 0)$

$$E=\frac{2}{(n+1)(n+2)}\left(1\cdot 2+2\cdot n+3\cdot 2(n-1)+4\cdot\frac{(n-2)(n-1)}{2}\right)$$
$$=\frac{4n(n+1)}{(n+1)(n+2)}$$
$$=\frac{4n}{n+2}$$

ここで,

$E\geqq 3 \iff \dfrac{4n}{n+2}\geqq 3 \quad \therefore\ n\geqq 6$　　(答)

(3) タイプは　$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 組

タイプは　$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(1+n)}{2}$ 組

合計　$n(n+1)$　組

$$\therefore\ P=\frac{n(n+1)}{{}_{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}C_2}$$
$$=\frac{2n(n+1)}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1\right)}$$
$$=\frac{8n}{(n+2)(n^2+3n)}$$
$$=\frac{8}{(n+2)(n+3)}$$　　(答)

[3]

(1)　　2 点 $\mathrm{A}(0,1)$, $\mathrm{B}(t,0)$ の中点を M とおく．$\mathrm{M}\left(\dfrac{t}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

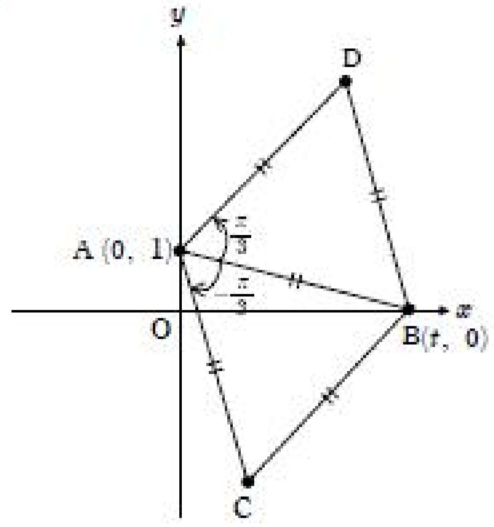
ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(t,\ -1)$ より $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直な単位ベクトルは $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ $(\pm1,\pm t)$（複合同順）

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(\frac{t}{2},\frac{1}{2}\right)+\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{t^2+1}}(-1,-t)$$

$$=\left(\frac{t}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\left(\frac{t}{2},\frac{1}{2}\right)+\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{t^2+1}}(1,t)$$

$$=\left(\frac{t}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$



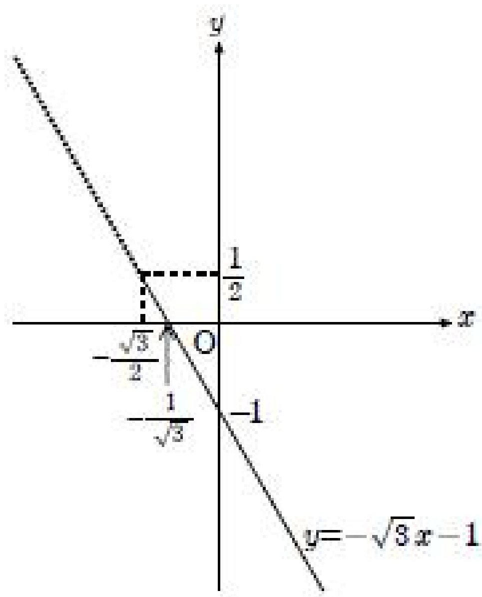
以上より，頂点の座標は，$\left(\dfrac{t+\sqrt{3}}{2},\dfrac{\sqrt{3}t+1}{2}\right)$, $\left(\dfrac{t-\sqrt{3}}{2},\dfrac{-\sqrt{3}t+1}{2}\right)$　　（答）

(2)　　$\mathrm{C}(x,y)$ とすると，(1)を用いて

$$\begin{cases} x=\dfrac{t-\sqrt{3}}{2} & \cdots\cdots① \\ y=\dfrac{-\sqrt{3}t+1}{2} & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①，②を同時に満たす $t\geqq0$ の実数 t が存在するから t を消去して，

$$\therefore\ y=-\sqrt{3}x-1\quad\left(x\geqq-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\qquad（答）$$



(3)　　(2)を同様に $\mathrm{D}(x,y)$ の軌跡を求めると，

$$\begin{cases} x=\dfrac{t+\sqrt{3}}{2} \\ y=\dfrac{\sqrt{3}t+1}{2} \end{cases}$$

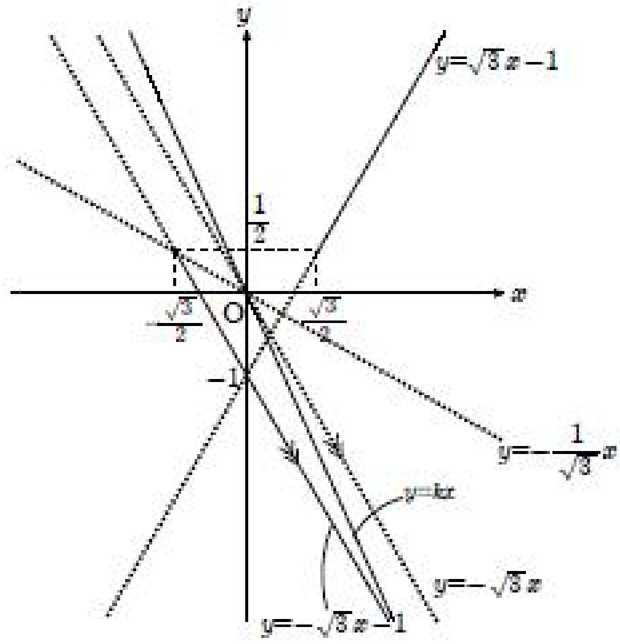
$$\therefore\ y=\sqrt{3}x-1\quad\left(x\geqq\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\qquad（答）$$

$\mathrm{C}(x,y)$ の軌跡　$y=-\sqrt{3}x-1$　$\left(x\geqq-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$\mathrm{D}(x,y)$ の軌跡　$y=\sqrt{3}x-1$　$\left(x\geqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　を下図に同時に描く．

これと，$y=kx$ が共有点をもてばよいから，

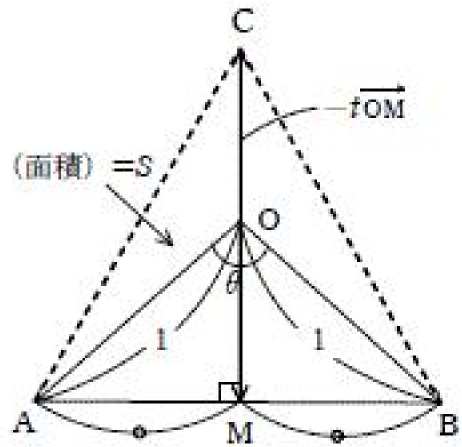
$$k<-\sqrt{3},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\leqq k\qquad（答）$$



[4]

(1)

$$S=(t+1)\triangle\mathrm{OAB}$$
$$=\frac{t+1}{2}\sin\theta \qquad （答）$$



(2)

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|=t\left|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right|=1$ のとき，

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right|=\cos\dfrac{\theta}{2}$ より，$\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{t}$

$0<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ より，

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}=\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}$$

$\sin\theta=\sin2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)=2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}=2\cdot\dfrac{\sqrt{t^2-1}}{t}\cdot\dfrac{1}{t}=\dfrac{2\sqrt{t^2-1}}{t^2}$ だから，

$$S=\frac{t+1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{t^2-1}}{t^2}=\frac{(t+1)\sqrt{t^2-1}}{t^2} \quad (t>1) \qquad （答）$$

(3)

(2)を用いて，$S^2=\dfrac{(t+1)^2(t^2-1)}{t^4}=T(t)$ とおく．

$$T'(t)=\frac{(4t^3+6t^2-2)\cdot t^4-(t^4+2t^3-2t-1)\cdot4t^3}{t^8}$$
$$=\frac{4t^4+6t^3-2t-4t^4-8t^3+8t+4}{t^5}$$
$$=\frac{-2t^3+6t+4}{t^5}$$
$$=\frac{-2(t+1)^2(t-2)}{t^5}$$

t	(1)	$\cdots$	2	$\cdots$
$T'(t)$		$+$	0	$-$
$T(t)$		↗	（最大）	↘

増減表より，$t=2$ で $T(t)$ は最大，つまり S^2 は最大，
つまり，S は最大となる．　　$\therefore\ t=2$ 　　（答）

[5]

(1) $f(x)=x^4e^{-3x}$ $(x\geqq 2)$ とおく.

$$f'(x)=4x^3e^{-3x}+x^4\cdot\left(-3e^{-3x}\right)$$
$$=x^3(4-3x)e^{-3x}<0$$

つまり，$y=f(x)$ は $x\geqq 2$ で単調減少

$$\therefore\ f(x)\underset{(x\geqq2)}{\leqq}f(2)\iff x^4e^{-3x}\underset{(x\geqq2)}{\leqq}16e^{-6}\qquad\text{（証明終）}$$

さらに，$x\geqq 2$ に対して，

$$0<x^4e^{-3x}\leqq 16e^{-6}$$
$$\iff 0<\boxed{x^3e^{-3x}}\leqq\frac{16e^{-6}}{x}$$

（最右辺）$\to 0$ $(x\to\infty)$

はさみうちの原理より，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^3e^{-3x}=0$ （答）

(2) $x>0$ において，

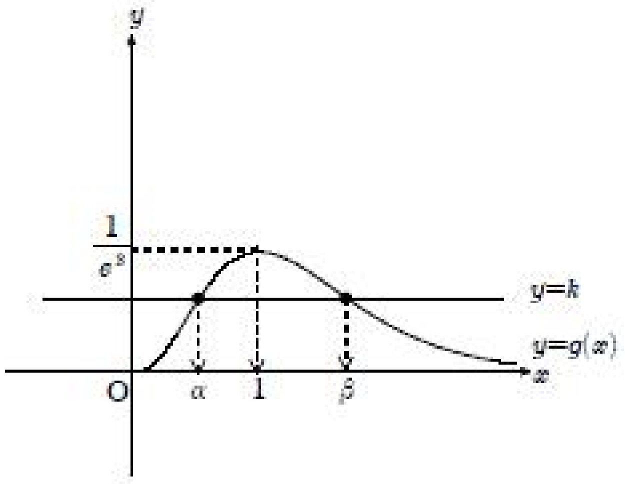
$$xe^{-3x}=\frac{k}{x^2}$$
$$\iff x^3e^{-3x}=k\quad\cdots①$$

①の異なる実解 $x=\alpha,\beta$ $(\alpha<\beta)$ を，2 関数 $\begin{cases}g(x)=x^3e^{-3x}\\ y=k\end{cases}$ に分離して考える.

$$g'(x)=3x^2e^{-3x}+x^3\left(-3e^{-3x}\right)$$
$$=3x^2(1-x)e^{-3x}$$

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	$(+\infty)$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	(0)	$\nearrow$	$\frac{1}{e^3}$	$\searrow$	(0)

(1)の結果より



右のグラフより，k の値の範囲は，

$$0<k<\frac{1}{e^3}\qquad\text{（答）}$$

(3) (2) より，

$$xe^{-3x}=\frac{k}{x^2}$$
$$\iff x^3e^{-3x}=k\quad(x=\alpha,\beta)$$
$$\therefore\ \alpha^3e^{-3\alpha}=\beta^3e^{-3\beta}\quad(=k)$$

ここで，$\beta=2\alpha$ を代入

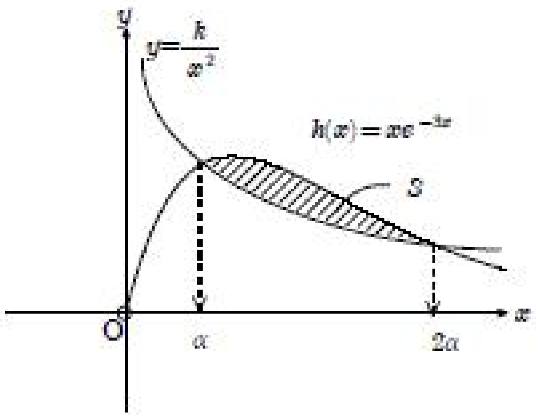
$$\alpha^3e^{-3\alpha}=8\alpha^3e^{-6\alpha}$$
$$\iff e^{3\alpha}=8$$
$$\iff 3\alpha=\log 8\qquad\therefore\ \underline{\alpha=\log 2}$$
$$\therefore\ k=\alpha^3e^{-3\alpha}=\underline{\underline{\frac{\alpha^3}{8}}}$$

次に　$h(x)=xe^{-3x}$　$(x>0)$　と　$y=\dfrac{k}{x^2}$　$(x>0)$ を描く.

$$h'(x)=e^{-3x}+x\left(-3e^{-3x}\right)$$
$$=(1-3x)e^{-3x}$$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$(+\infty)$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	(0)	$\nearrow$	$\frac{1}{3e}$	$\searrow$	(0)

求める面積を S とおく.



$$S=\int_\alpha^{2\alpha}\left(xe^{-3x}-\frac{k}{x^2}\right)dx$$
$$=\int_\alpha^{2\alpha}x\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)'dx+k\left[\frac{1}{x}\right]_\alpha^{2\alpha}$$
$$=\left[-\frac{x}{3}e^{-3x}\right]_\alpha^{2\alpha}+\frac{1}{3}\int_\alpha^{2\alpha}e^{-3x}dx+k\left(\frac{1}{2\alpha}-\frac{1}{\alpha}\right)$$
$$=-\frac{2\alpha}{3}e^{-6\alpha}+\frac{\alpha}{3}e^{-3\alpha}-\frac{1}{9}\left(e^{-6\alpha}-e^{-3\alpha}\right)-\frac{k}{2\alpha}$$

$$\left(\begin{array}{l}\alpha=\log 2,\ e^{-3\alpha}=\dfrac{1}{8}\\ k=\dfrac{\alpha^3}{8}\end{array}\right)$$

$$=-\frac{2}{3}\log 2\cdot\frac{1}{64}+\frac{1}{3}\log 2\cdot\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\left(\frac{1}{64}-\frac{1}{8}\right)-\frac{(\log 2)^2}{16}$$
$$=-\frac{1}{96}\log 2+\frac{1}{24}\log 2+\frac{7}{576}-\frac{1}{16}(\log 2)^2$$
$$=-\frac{1}{16}(\log 2)^2+\frac{1}{32}\log 2+\frac{7}{576}\qquad\text{（答）}$$