[1]

(1) $y=2x^2-8$ 上の点 $\left(t,\ 2t^2-8\right)$ での接線は，

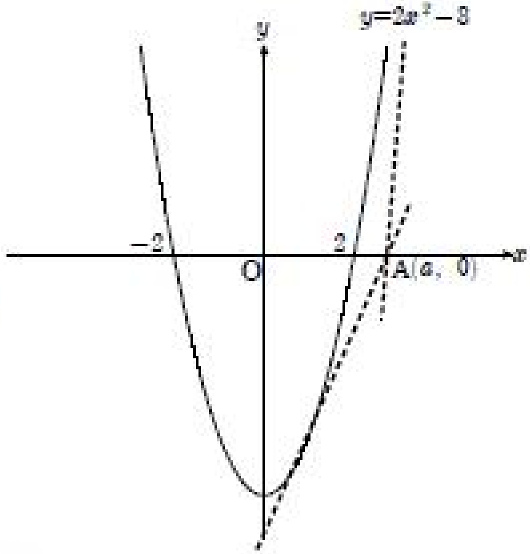
$y'=4t$ より，

$$y=4t(x-t)+2t^2-8$$

$$\iff y=4tx-2t^2-8$$

これが，$\mathrm{A}(a,\ 0)$ を通るから

$$0=4at-2t^2-8 \iff t^2-2at+4=0 \qquad \cdots①$$



①が異なる 2 実解をもてばよく（$a>0$ に注意）

$$\frac{D}{4}=a^2-4=\underbrace{(a+2)}_{(+)}(a-2)>0$$

$$\therefore\ a>2 \qquad (答)$$

(2) ①より，$t=a\pm\sqrt{a^2-4}$ より，$\alpha=a-\sqrt{a^2-4}$，$\beta=a+\sqrt{a^2-4}$

$$\beta-\alpha=3 \iff 2\sqrt{a^2-4}=3$$

$$\therefore\ a^2-4=\frac{9}{4} \iff a^2=\frac{25}{4}$$

$$\therefore\ a=\frac{5}{2}\ (>0) \qquad (答)$$

このとき，$\alpha=1,\ \beta=4$ つまり $\mathrm{P}(1,\ -6)$，$\mathrm{Q}(4,\ 24)$

$$l_{\mathrm{P}}: y=4(x-1)-6 \iff y=4x-10 \qquad (答)$$

$$l_{\mathrm{Q}}: y=16(x-4)+24 \iff y=16x-40 \qquad (答)$$

(3) 求める面積を S とする．

$$S=\int_1^{\frac{5}{2}}2(x-1)^2dx+\int_{\frac{5}{2}}^{4}2(x-4)^2dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}(x-1)^3\right]_1^{\frac{5}{2}}+\left[\frac{2}{3}(x-4)^3\right]_{\frac{5}{2}}^{4}$$

$$=\frac{9}{2} \qquad (答)$$

[2]

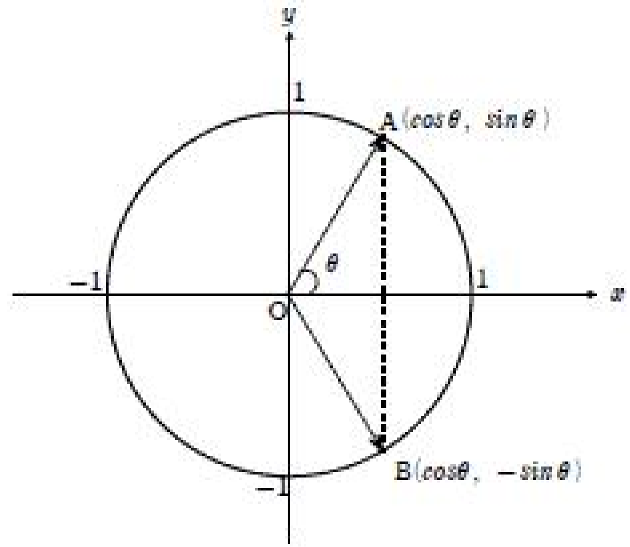
(1)
$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(\cos\theta,\ \sin\theta)\cdot(\cos\theta,\ -\sin\theta)$$
$$=\cos^2\theta-\sin^2\theta$$
$$=\cos 2\theta$$

$$\therefore\ -1<\cos 2\theta\leqq\frac{1}{2}\quad(0<2\theta<2\pi)$$

$$\therefore\ \frac{\pi}{3}\leqq 2\theta<\pi,\ \ \pi<2\theta\leqq\frac{5}{3}\pi$$

すなわち,

$$\frac{\pi}{6}\leqq\theta<\frac{\pi}{2},\ \ \frac{\pi}{2}<\theta\leqq\frac{5}{6}\pi\qquad\cdots（答）$$



(2)
$$\overrightarrow{OP}=2(\cos\theta,\ \sin\theta)+\frac{1}{2}(\cos\theta,\ -\sin\theta)$$
$$=\left(\frac{5}{2}\cos\theta,\ \frac{3}{2}\sin\theta\right)$$
$$\triangle POQ=\frac{1}{2}\left|\frac{5}{2}\cos\theta\right|\left|\frac{3}{2}\sin\theta\right|$$
$$=\frac{15}{8}|\sin\theta\cos\theta|$$
$$=\frac{15}{16}|\sin 2\theta|$$

ここで，$0<2\theta<2\pi$ より，$2\theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi\left(\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi\right)$ のとき,

$|\sin 2\theta|=|\pm 1|=1$ で最大となる.

$$\therefore\ (\text{最大値})=\frac{15}{16}\qquad（答）$$

[3]

(1)

$$f(x)=\frac{k}{2}\left(f(1)-f(0)\right)$$

$$\Longleftrightarrow \ \log_2(x+1)=\frac{k}{2}(1-0)$$

$$\Longleftrightarrow \ x+1=2^{\frac{k}{2}} \qquad \therefore \ x=2^{\frac{k}{2}}-1 \qquad \text{（答）}$$

(2)

$$k\left(x_k-x_{k-1}\right)$$

$$=k\left\{2^{\frac{k}{2}}-1-\left(2^{\frac{k-1}{2}}-1\right)\right\}$$

$$=k\left(2^{\frac{k}{2}}-2^{\frac{k-1}{2}}\right)$$

$$=k\cdot 2^{\frac{k}{2}}-(k-1)\cdot 2^{\frac{k-1}{2}}-2^{\frac{k-1}{2}}$$

$$\therefore \ S_n=\sum_{k=1}^{n} k\left(x_k-x_{k-1}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\underline{\underline{k\cdot 2^{\frac{k}{2}}-(k-1)\cdot 2^{\frac{k-1}{2}}}}-\left(\sqrt{2}\right)^{k-1}\right\}$$

$$=\left(1\cdot 2^{\frac{1}{2}}-0\cdot 2^{\frac{0}{2}}\right)+\left(2\cdot 2^{\frac{3}{2}}-1\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)+\left(3\cdot 2^{\frac{3}{2}}-2\cdot 2^{\frac{2}{2}}\right)+\cdots$$

$$\cdots+\left(n\cdot 2^{\frac{n}{2}}-(n-1)\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}\right)-\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{n}-1}{\sqrt{2}-1}$$

$$=n\cdot 2^{\frac{n}{2}}-\frac{2^{\frac{n}{2}}-1}{\sqrt{2}-1}$$

$$=\left(n-\sqrt{2}-1\right)\cdot 2^{\frac{n}{2}}+\sqrt{2}+1 \qquad \text{（答）}$$

[4]

(1) $\mathrm{R}(x,\ y)$ とおく．$\left(x^2+y^2=1 \quad \cdots①\right)$

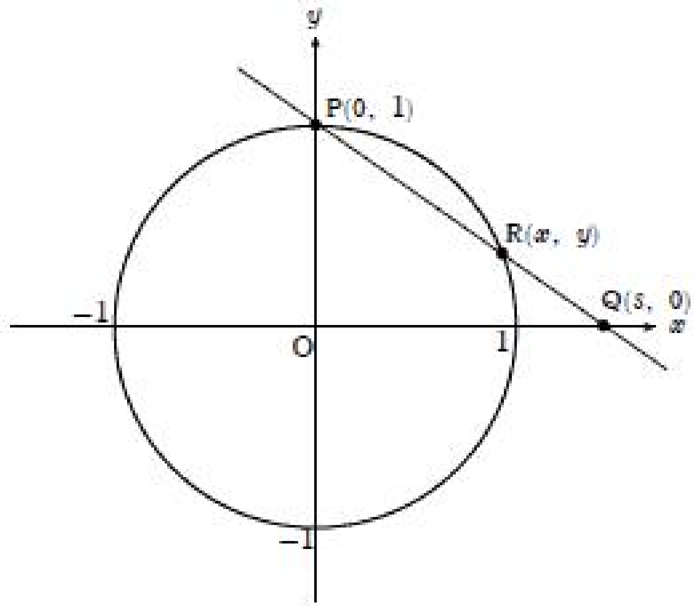
$$\mathrm{PR}=\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{2-2y} \qquad (\because \quad ①より)$$

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(s,\ -1)$ で $\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|=\sqrt{s^2+1}$

$$\therefore \ \overrightarrow{\mathrm{OR}}=(x,\ y)=(0,\ 1)+\frac{\sqrt{2-2y}}{\sqrt{s^2+1}}(s,\ -1)$$

つまり，

$$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2-2y}}{\sqrt{s^2+1}}s & \cdots\cdots② \\ y=1-\dfrac{\sqrt{2-2y}}{\sqrt{s^2+1}} & \cdots\cdots③ \end{cases}$$



③より，$y=1-\dfrac{2}{s^2+1}=\dfrac{s^2-1}{s^2+1}$

これを②に代入して，

$$x=\frac{\sqrt{2-\dfrac{2(s^2-1)}{s^2+1}}}{\sqrt{s^2+1}}s=\frac{2s}{s^2+1} \quad \therefore \ \mathrm{R}\left(\frac{2s}{s^2+1},\ \frac{s^2-1}{s^2+1}\right) \qquad (答)$$

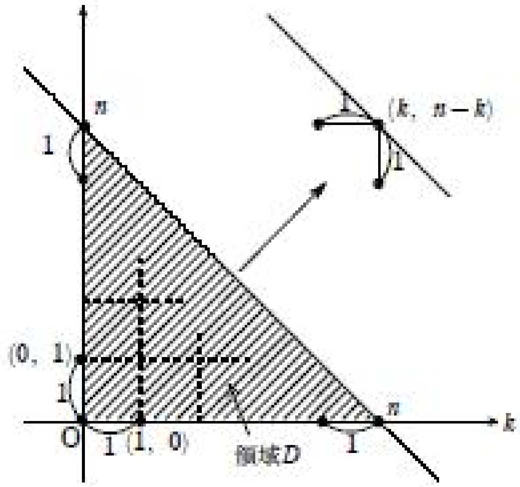
(2) $s=\dfrac{q}{p}$ （p は自然数，q は整数，p と q は互いに素な整数）とおく．

$$\begin{cases} \mathrm{R}_x=\dfrac{2s}{s^2+1}=\dfrac{2\cdot\dfrac{q}{p}}{\dfrac{q^2}{p^2}+1}=\dfrac{2pq}{p^2+q^2} \cdots\cdots 有理数 \\ \mathrm{R}_y=\dfrac{s^2-1}{s^2+1}=\dfrac{\dfrac{q^2}{p^2}-1}{\dfrac{q^2}{p^2}+1}=\dfrac{q^2-p^2}{p^2+q^2} \cdots\cdots 有理数 \end{cases}$$

これより，点 R は有理点（証明終）

[5]

(1)



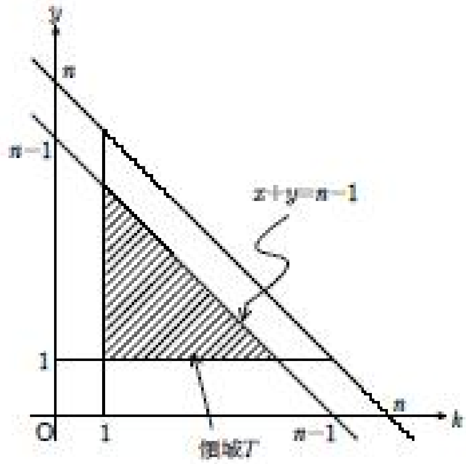
点O(0, 0)の隣接点は(1, 0), (0, 1)　　(答)

$$\therefore \begin{cases} \mathrm{P}(n,\ 0)\ \text{のとき}\ (n-1,\ 0)\ \text{の 1 個} \\ \mathrm{P}(0,\ n)\ \text{のとき}\ (0,\ n-1)\ \text{の 1 個} \\ \mathrm{P}(k,\ n-k)\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)\ \text{のとき}\quad (k-1,\ n-k)\ \text{と}\ (k,\ n-k-1)\ \text{の 2 個} \end{cases}$$

(答)

(2)　求める格子点の個数は，右図の
領域$T(x \geqq 1,\ y \geqq 1,\ x+y \leqq n-1)$内の格子点の数である．

$$\sum_{i=1}^{n-2} i = \frac{(n-2)(n-1)}{2}\ \text{個}$$　(答)



(3)

(1)の 2 点の $n-1$ 個に
原点 0 の 1 個を加えて

$(1,\ 0),\ (2,\ 0),\ \cdots(n-1,\ 0)$
$(0,\ 1),\ (0,\ 2),\ \cdots(0,\ n-1)$ $\}\ 2(n-1)$ 個

個数(N)	1	2	3	4
p(N)	$\dfrac{2}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$	$\dfrac{n}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$	$\dfrac{2(n-1)}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$	$\dfrac{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$

（全格子点の数は，$1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$　個）

$$E = 1\cdot\frac{2}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} + 2\cdot\frac{n}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} + 3\cdot\frac{2(n-1)}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} + 4\cdot\frac{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$$

$$= \frac{4+4n+12(n-1)+4(n-2)(n-1)}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{4n(n+1)}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{4n}{n+2}$$

ここで，

$$\frac{4n}{n+2} \geqq 3 \iff 4n \geqq 3n+6 \quad \therefore\ n \geqq 6$$　(答)