

学 力 検 査 問 題

数 学

数学Ⅰ，数学Ⅱ

数学A，数学B

平成 25 年 2 月 25 日

自 9 時 00 分

至 11 時 00 分

答案作成上の注意

- 1 この問題冊子には，数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学A，数学B（数列，ベクトル）の問題が**5 問**あります。総ページは**13 ページ**で，問題は 4 ページ以降の偶数ページにあります。
- 2 解答用紙は**5 枚**です。解答はすべて**対応する番号の解答用紙**の所定の**解答欄**（表面）に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。
- 3 **受験番号**は，それぞれの解答用紙の所定の欄（**2 ヶ所**）に必ず記入しなさい。
- 4 試験終了後は，**解答用紙の右上の番号の順**に並べなさい。
- 5 配付した解答用紙は，持ち出してはいけません。

空白

空 白

[1] 放物線 $y = 2x^2 - 8$ を C とする。 x 軸上の点 $A(a, 0)$ ($a > 0$) を通り C と接する直線が 2 本あるとき、次の問いに答えよ。

(1) a の値の範囲を求めよ。

(2) 2 つの接点 P, Q の x 座標をそれぞれ α, β ($\alpha < \beta$) とする。 $\beta - \alpha = 3$ のとき、 a の値と 2 本の接線の方程式を求めよ。

(3) (2) で求めた 2 本の接線と C で囲まれた部分の面積を求めよ。

空白

〔2〕 座標平面上に点 $A(\cos \theta, \sin \theta)$ ($0 < \theta < \pi$) がある。原点を O とし、 x 軸に関して点 A と対称な点を B とする。次の問いに答えよ。

(1) $-1 < \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \leq \frac{1}{2}$ となる θ の範囲を求めよ。

(2) 点 P を

$$\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

で定める。点 P から x 軸に下ろした垂線を PQ とする。 θ が (1) で求めた範囲を動くとき、 $\triangle POQ$ の面積の最大値を求めよ。

空 白

〔 3 〕 関数 $f(x) = \log_2(x+1)$ に対して、次の問いに答えよ。

(1) 0 以上の整数 k に対して、 $f(x) = \frac{k}{2}(f(1) - f(0))$ を満たす x を k を用いて表せ。

(2) (1) で求めた x を x_k とおく。 $S_n = \sum_{k=1}^n k(x_k - x_{k-1})$ を n を用いて表せ。

空 白

〔4〕 座標平面上で、原点 O を中心とする半径 1 の円を C とし、 2 点 $P(0, 1)$, $Q(s, 0)$ を考える。 2 点 P, Q を通る直線を ℓ とし、 ℓ と C の交点のうち P ではないものを R とする。次の問いに答えよ。

(1) 点 R の座標を s を用いて表せ。

(2) x 座標と y 座標がともに有理数である点を有理点という。 s が有理数のとき、 R は有理点であることを示せ。

空 白

- 〔5〕 座標平面上の点で、 x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。 n を 3 以上の自然数とし、連立不等式

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq n$$

の表す領域を D とする。格子点 $A(a, b)$ に対して、領域 D 内の格子点 $B(c, d)$ が $|a - c| + |b - d| = 1$ を満たすとき、点 B を点 A の隣接点という。次の問いに答えよ。

- (1) 点 $O(0, 0)$ の隣接点をすべて求めよ。また、領域 D 内の格子点 P が直線 $x + y = n$ 上にあるとき、 P の隣接点の個数を求めよ。
- (2) 領域 D 内の格子点のうち隣接点の個数が 4 であるものの個数を求めよ。
- (3) 領域 D から格子点を 1 つ選ぶとき、隣接点の個数の期待値が 3 以上となるような n の範囲を求めよ。ただし、格子点の選ばれ方は同様に確からしいものとする。

空 白

