[1]

(1)

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}+\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}}{2}$ より,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}&=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}\\&=2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a&2\\-2&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2-a\\2\end{pmatrix}\ \cdots\cdots①\end{aligned}$$

さらに,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}=A\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}=A^2\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\begin{pmatrix}a&2\\-2&b\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}a^2-4&2a+2b\\-2a-2b&b^2-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}a^2-4\\-2a-2b\end{pmatrix}\ \cdots\cdots②\end{aligned}$$

①, ②より, $\begin{cases}2-a=a^2-4\\2=-2a-2b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+3)(a-2)=0\\a+b+1=0\end{cases}$

ここで, $a>0$ より,

$(a,b)=(2,-3)$　　　　(答)

(2)　$\vec{v}=(v_1,v_2)=c\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}$ とし, (1)より, $A=\begin{pmatrix}2&2\\-2&-3\end{pmatrix}$,

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1,0),\ \overrightarrow{\mathrm{OP_1}}=(2,-2),\ \overrightarrow{\mathrm{OP_2}}=(0,2)$ となる. $(\det A\neq 0)$

ここで, $A\vec{v}=\vec{v}$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\quad A\left(c\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}\right)=c\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}\\&\Leftrightarrow\quad c\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}+\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}=c\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}\\&\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{\mathrm{OP_2}}-\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}=c\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}\right)\\&\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}=c\overrightarrow{\mathrm{P_1P}}\\&\Leftrightarrow\quad (-2,4)=c(-1,2)\qquad\qquad \therefore\ c=2\qquad(答)\end{aligned}$$

$$\left(\vec{v}=(4,-2)\right)$$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{PP_1}}=(2,-2)-(1,0)=(1,-2)\left(=(w_1,w_2)\right)$

ここで, $\vec{w}=(1,-2)$ とする.

「$A^n\vec{w}=(-2)^n\vec{w}$　$(n=1,2,3,\cdots\cdots)$」$\cdots\cdots(*)$を示す.

(Ⅰ) $n=1$ のとき

$$A\vec{w}=\begin{pmatrix}2&2\\-2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}=-2\vec{w}$$

$n=1$ において$(*)$は成立.

(Ⅱ) $n=k$ で成立を仮定, つまり, $A^k\vec{w}=(-2)^k\vec{w}$ とする.

ここで,

$$\begin{aligned}A^{k+1}\vec{w}&=(-2)^kA\vec{w}\\&=(-2)^{k+1}\vec{w}\end{aligned}$$

$n=k$ で成立すれば, $n=k+1$ でも$(*)$は成立.

以上(Ⅰ)(Ⅱ)より, すべての自然数 n に対して$(*)$は成立. (証明終)

(4)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=s(v_1,v_2)+t(w_1,w_2)\\&=s\left(2\overrightarrow{\mathrm{OP}}+A\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)+t\left(A\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)\\&=(s+t)A\overrightarrow{\mathrm{OP}}+(2s-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\\Leftrightarrow\quad&(s+t)\underbrace{A\overrightarrow{\mathrm{OP}}}_{\left(\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}\right)}+(2s-t-1)\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{0}\end{aligned}$$

ここで, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\neq\vec{0},\ \overrightarrow{\mathrm{OP_1}}\neq\vec{0},\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}\not\parallel\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}$ より $\begin{cases}s+t=0\\2s-t=1\end{cases}$

$$\therefore\ (s,t)=\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)\qquad(答)$$

$$\begin{aligned}A^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}&=A^n\overrightarrow{\mathrm{OP}}=A^n\left(s\vec{v}+t\vec{w}\right)\ \left(\vec{v}=(4,-2),\ \vec{w}=(1,-2)\right)\\&=sA^n\vec{v}+tA^n\vec{w}\\&=s\vec{v}+t(-2)^n\vec{w}\\&=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4-(-2)^n\\-2-(-2)^{n+1}\end{pmatrix}\qquad(答)\end{aligned}$$

［２］

(1)
$$f(x)=g(x)$$
$$\Leftrightarrow \quad x\sin x=\sqrt{3}x\cos x$$
$$\Leftrightarrow \quad 2x\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0$$

ここで，$-\pi \leqq x \leqq \pi$ より，$-\frac{4}{3}\pi \leqq x-\frac{\pi}{3} \leqq \frac{2}{3}\pi$

$$\therefore\ x=0 \quad \text{または} \quad x-\frac{\pi}{3}=-\pi,0$$
$$\therefore \left(-\frac{2}{3}\pi,\frac{\sqrt{3}}{3}\pi\right),(0,0),\left(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{6}\pi\right)$$
（答）

(2) (1)より，

$a=\frac{\pi}{3}$ となり，$\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{6}\pi\right)$

$g'(x)=\sqrt{3}\cos x-\sqrt{3}x\sin x$ より，$g'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{2}$

$$h(x)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$$
$$\Leftrightarrow \quad h(x)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{2}\right)x+\frac{\pi^2}{6}$$
（答）

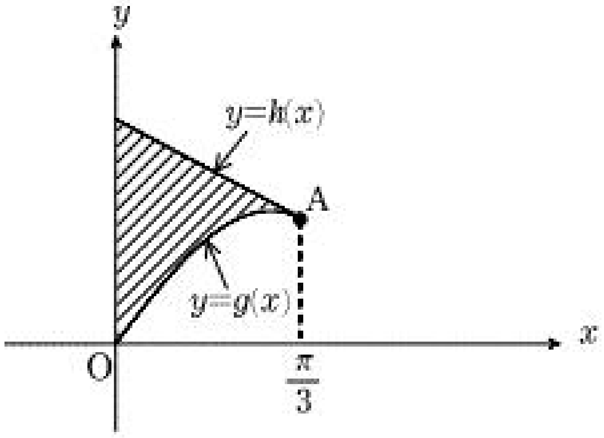
(3)
$$F(x)=h(x)-g(x)$$
$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{2}\right)x+\frac{\pi^2}{6}-\sqrt{3}x\cos x \quad \left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{3}\right) \text{とする．}$$
$$F'(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{2}-\sqrt{3}\cos x+\sqrt{3}x\sin x$$
$$F''(x)=\sqrt{3}\sin x+\sqrt{3}\sin x+\sqrt{3}x\cos x$$
$$=\sqrt{3}(2\sin x+x\cos x)\geqq 0$$

$y=F'(x)$ は $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{3}$ で単調増加　$F'(x)\leqq F'\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$

$y=F(x)$ は $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{3}$ で単調減少　$F(x)\geq F\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$

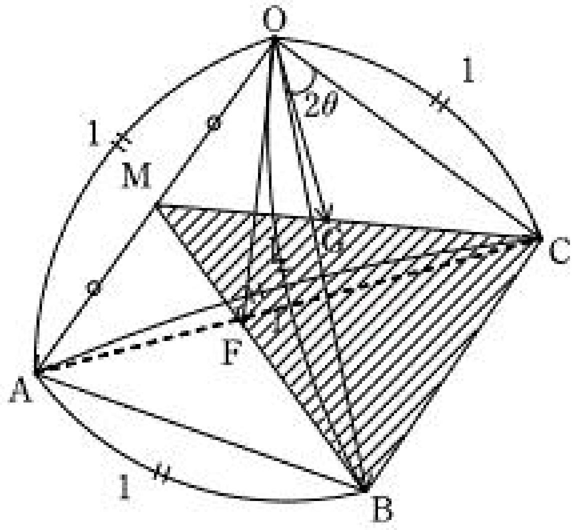
以上より，$f(x)\geqq g(x)$ $\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{3}\right)$ は示された．（証明終）

(4) 求める面積を S とおく．



$$S=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\{h(x)-g(x)\}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{2}\right)x+\frac{\pi^2}{6}-\sqrt{3}x\cos x\right\}dx$$
$$=\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{4}\right)x^2+\frac{\pi^2}{6}x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}x(\sin x)'\,dx$$
$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{\pi^2}{9}+\frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}[x\sin x]_0^{\frac{\pi}{3}}+\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x dx$$
$$=\frac{\pi^3}{36}+\frac{\sqrt{3}}{36}\pi^2-\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$
（答）

[3]



(1) $\overrightarrow{OF}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$ （答）

(2) $\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)$ より，

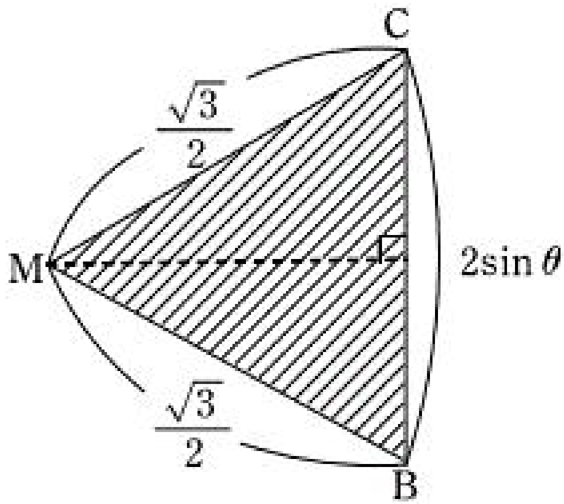
$$\overrightarrow{FG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{FG}\,/\!/\,\overrightarrow{BC}$$ （証明終）

(3) $BC=2\sin\theta$ より，右図の通り．

$$\triangle MBC=\frac{1}{2}\cdot 2\sin\theta\cdot\sqrt{\frac{3}{4}-\sin^2\theta}$$

$$=\sin\theta\sqrt{\frac{3}{4}-\sin^2\theta}$$ （答）



［4］

(1)　「$a_n > 1$（$n = 1, 2, 3, \cdots$）」……(*)を示す．

（Ⅰ）　$n = 1$ のとき，$a_1 = \alpha > 1$ より成立．

（Ⅱ）　$n = k$ で成立を仮定，つまり，$a_k > 1$ とする．

$$a_{k+1} = \sqrt{\frac{2a_k}{a_k + 1}} = \sqrt{\frac{2a_k + 2 - 2}{a_k + 1}} = \sqrt{2 - \frac{2}{a_k + 1}} > \sqrt{2 - \frac{2}{1+1}} = 1$$

$n = k$ で成立を仮定すれば，$n = k + 1$ でも成立．

以上（Ⅰ）（Ⅱ）より，すべての自然数 n に対して(*)は成立．（証明終）

(2)　$\frac{1}{2}(x-1) - \left(\sqrt{x} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(x - 2\sqrt{x} + 1\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} - 1\right)^2 \geqq 0$

よって，$\sqrt{x} - 1 \leqq \frac{1}{2}(x-1)$ は示された．（証明終）

(3)　(2)で $x = {a_{n+1}}^2$（>1）を代入．

$$\begin{aligned}
\underset{(+)}{\underline{\underline{a_{n+1} - 1}}} &\leqq \frac{1}{2}\left({a_{n+1}}^2 - 1\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2a_n}{a_n + 1} - 1\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{a_n - 1}{a_n + 1} \\
&= \frac{1}{2(a_n + 1)}\underset{(+)}{\underline{\underline{(a_n - 1)}}} \\
&< \frac{1}{4}\underset{(+)}{\underline{\underline{(a_n - 1)}}} \qquad \therefore\ a_{n+1} - 1 < \frac{1}{4}(a_n - 1)
\end{aligned}$$

これより，$n \geqq 2$ で，$a_n - 1 < \frac{1}{4}(a_{n-1} - 1) < \left(\frac{1}{4}\right)^2 (a_{n-2} - 1) < \cdots\cdots < \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} (a_1 - 1)$

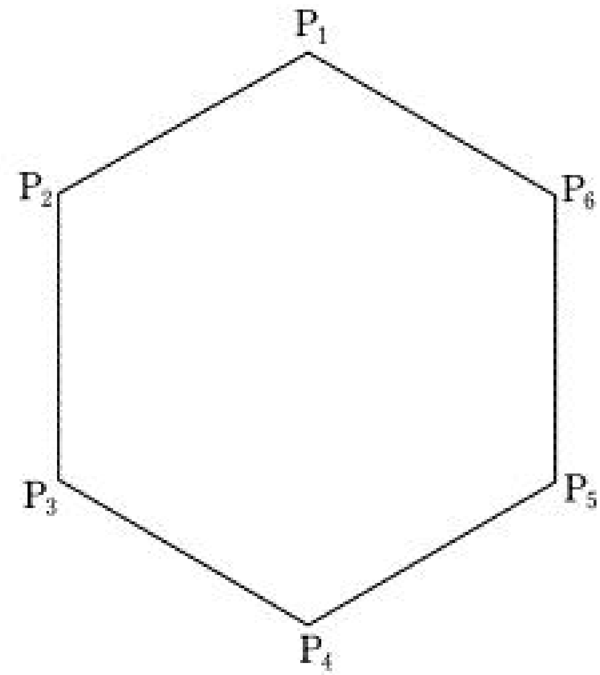
$\therefore\ a_n - 1 \leqq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} (\alpha - 1)$　　（等号成立は $n = 1$ のとき）は示された．（証明終）

[5]

(1) j……1以外の5通り

k……1と j 以外の4通り

$$P(S>0)=\frac{5\cdot4}{6\cdot6}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9} \qquad \text{(答)}$$



(2)

・3辺の長さ $\left(1, 1, \sqrt{3}\right)$…… $S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

・3辺の長さ $\left(1, 2, \sqrt{3}\right)$…… $S=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

・3辺の長さ $\left(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$……$S=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ (最大)

より，$$P\underset{(\triangle P_1P_3P_5)}{\underline{\underline{\left(S=\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)}}}=\frac{2}{6\cdot6}=\frac{1}{18} \qquad \text{(答)}$$

(3)

S	0	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{2\sqrt{3}}{4}$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	計
P		$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{2}{36}$	1

求める期待値 E は，

$$E=\frac{1}{36}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+6\sqrt{3}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{36}\cdot9\sqrt{3}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4} \qquad \text{(答)}$$