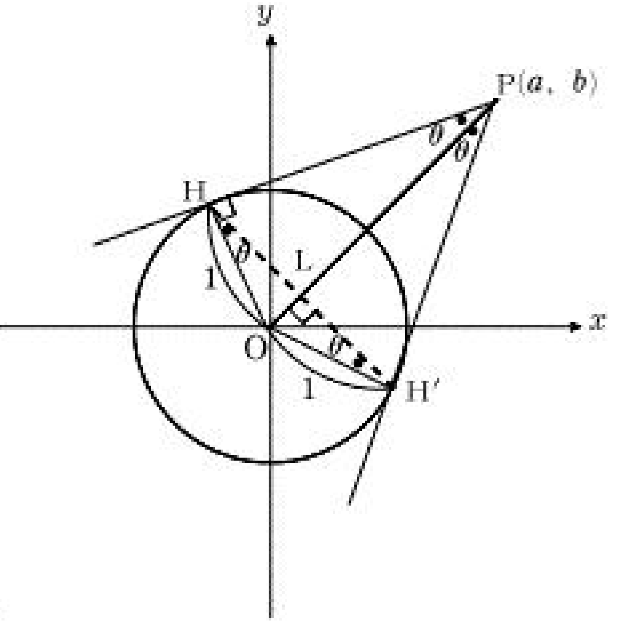
[1]

(1)　$\mathrm{OP}=\sqrt{a^2+b^2}$ より，

$$\mathrm{PH}=\sqrt{\mathrm{OP}^2-1}$$
$$=\sqrt{a^2+b^2-1}\qquad\text{（答）}$$

$$\sin\theta=\frac{1}{\mathrm{OP}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\qquad\text{（答）}$$



(2)　直線OPとHH′の交点をLとする．

$$\mathrm{HL}\,(=\mathrm{H'L})=\cos\theta=\sqrt{1-\frac{1}{a^2+b^2}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2-1}{a^2+b^2}}$$

ここで，$\mathrm{HH'}=\mathrm{OP}$

$$\Leftrightarrow\quad 2\sqrt{\frac{a^2+b^2-1}{a^2+b^2}}=\sqrt{a^2+b^2}$$
$$\Leftrightarrow\quad 2\sqrt{a^2+b^2-1}=a^2+b^2$$
$$\therefore\quad 4\left(a^2+b^2-1\right)=\left(a^2+b^2\right)^2$$
$$\Leftrightarrow\quad \left(a^2+b^2\right)^2-4\left(a^2+b^2\right)+4=0$$
$$\Leftrightarrow\quad \left(a^2+b^2-2\right)^2=0\qquad\therefore\ a^2+b^2=2\ \left(a^2+b^2>1\text{ を満たす}\right)$$

$\therefore$　点$\mathrm{P}(a,b)$は原点Oを中心，半径$\sqrt{2}$の円を描く．　（答）

((2)の別解)

$$\mathrm{OH}=\mathrm{OH'}=\mathrm{OP}\sin\theta$$
$$\therefore\ \mathrm{HH'}=2\mathrm{OP}\sin\theta\cos\theta$$

条件より，

$$2\mathrm{OP}\sin\theta\cos\theta=\mathrm{OP}$$
$$\Leftrightarrow\ \sin2\theta=1$$

ここで，$0<2\theta<\pi$　つまり，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

よって，$2\theta=\dfrac{\pi}{2}\ \left(\theta=\dfrac{\pi}{4}\right)$

これより，

$$\angle\mathrm{OHP}=\angle\mathrm{OH'P}=\angle\mathrm{HPH'}=\frac{\pi}{2}$$

さらに，$\mathrm{OH}=\mathrm{OH'}=1$

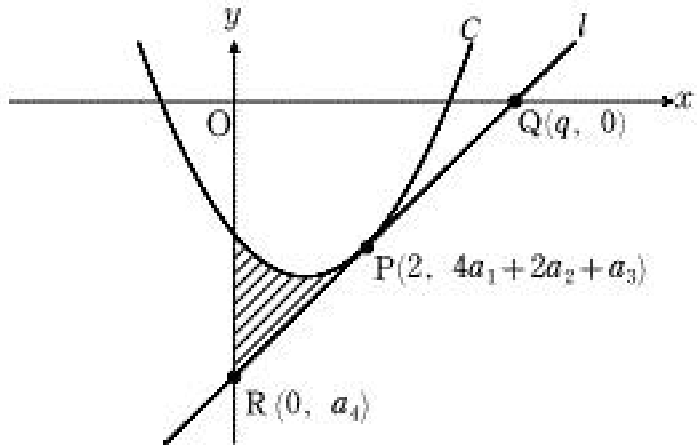
つまり，四角形OHPH′は1辺の長さが1の正方形

$$\therefore\ a^2+b^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$$

$\therefore$　点$\mathrm{P}(a,b)$は原点Oを中心，半径$\sqrt{2}$の円を描く．

[2]

(1)　$y' = 2a_1 x + a_2$ より，



$$l : y = (4a_1 + a_2)(x-2) + 4a_1 + 2a_2 + a_3$$

$$\Leftrightarrow \quad y = (4a_1 + a_2)x - 4a_1 + a_3$$

$$\therefore \ a_4 = -4a_1 + a_3 \quad \left(a_4 - a_3 = \underset{\text{(公差)}}{\underline{\underline{-4a_1}}} \right)$$

$$\therefore \begin{cases} a_2 = a_1 - 4a_1 = -3a_1 \\ a_3 = a_2 - 4a_1 = -7a_1 \\ a_4 = a_3 - 4a_1 = -11a_1 \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

(2)　(1)より，

$$0 = (4a_1 + a_2)q - 4a_1 + a_3$$

$$\Leftrightarrow \quad a_1 q = 11a_1 \qquad \therefore \ q = 11 \qquad \text{(答)}$$

(3)

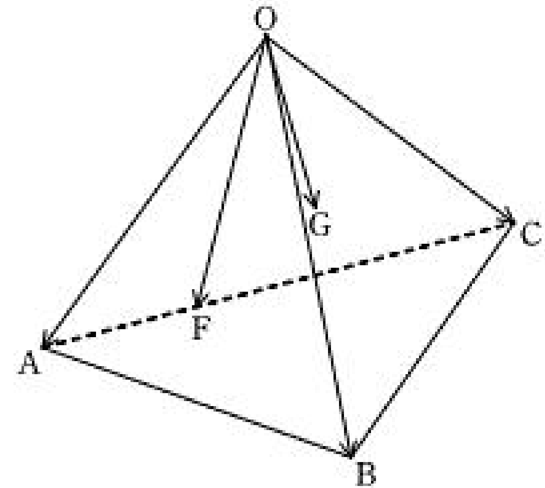
$$S = \int_0^2 a_1 (x-2)^2 \, dx$$

$$= \left[\frac{a_1}{3}(x-2)^3 \right]_0^2$$

$$= \frac{8}{3}a_1 = 11 \qquad \therefore \ a_1 = \frac{33}{8} \ \text{(答)}$$

［3］

(1) $\overrightarrow{OF}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$ （答）



(2) $\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)$ より，

$$\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OF}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{FG}\,/\!/\,\overrightarrow{BC}$$ （証明終）

(3) $\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|=1,\ \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=0$ のとき，

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{FG}\right|^2&=\frac{1}{9}\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=\frac{1}{9}\left|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\right|^2\\&=\frac{1}{9}\left(1+1-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}\right)\\&=\frac{2}{9}\end{aligned}$$

$$\therefore\ \left|\overrightarrow{FG}\right|=\frac{\sqrt{2}}{3}$$ （答）

[4]

(1)　「$a_n>1$ $(n=1,2,3,\cdots)$」……(*)を示す.

（Ⅰ）　$n=1$のとき，$a_1=\alpha>1$より成立.

（Ⅱ）　$n=k$で成立を仮定，つまり，$a_k>1$とする.

$$a_{k+1}=\sqrt{\frac{2a_k}{a_k+1}}=\sqrt{\frac{2a_k+2-2}{a_k+1}}=\sqrt{2-\frac{2}{a_k+1}}>\sqrt{2-\frac{2}{1+1}}=1$$

$n=k$で成立を仮定すれば，$n=k+1$でも成立.

以上（Ⅰ）（Ⅱ）より，すべての自然数nに対して(*)は成立.（証明終）

(2)　$$\frac{1}{2}(x-1)-\left(\sqrt{x}-1\right)=\frac{1}{2}\left(x-2\sqrt{x}+1\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}-1\right)^2\geqq 0$$

よって，$\sqrt{x}-1\leqq\frac{1}{2}(x-1)$は示された.（証明終）

(3)　(2)で$x={a_{n+1}}^2$　(>1)を代入.

$$\begin{aligned}\underset{(+)}{\underline{\underline{a_{n+1}-1}}}&\leqq\frac{1}{2}\left({a_{n+1}}^2-1\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{2a_n}{a_n+1}-1\right)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{a_n-1}{a_n+1}\\&=\frac{1}{2(a_n+1)}\underset{(+)}{\underline{\underline{(a_n-1)}}}\\&<\frac{1}{4}\underset{(+)}{\underline{\underline{(a_n-1)}}}\qquad\therefore\ a_{n+1}-1<\frac{1}{4}(a_n-1)\end{aligned}$$

これより，$n\geqq 2$で，$a_n-1<\frac{1}{4}\left(a_{n-1}-1\right)<\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(a_{n-2}-1\right)<\cdots\cdots<\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left(a_1-1\right)$

$\therefore\ a_n-1\leqq\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}(\alpha-1)$　　（等号成立は$n=1$のとき）は示された.（証明終）

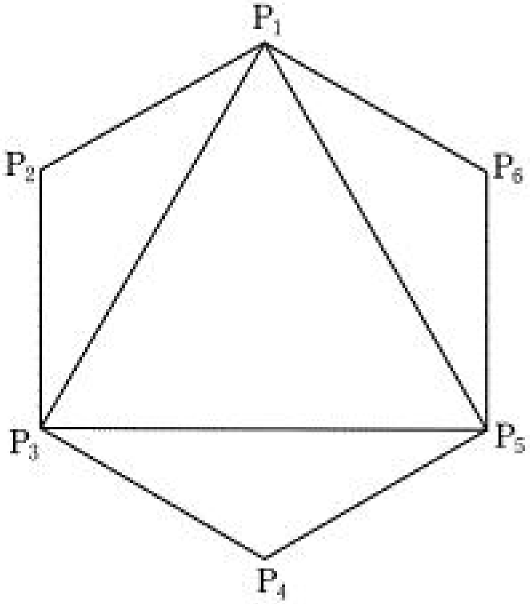
[5]

(1) $$\mathrm{P}=\frac{5\cdot 4}{6\cdot 6}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$$ （答）

(2) $P_1P_3P_5$ の正三角形のときだから，

$$\mathrm{P}=\frac{2}{6\cdot 6} \qquad \leftarrow ((3,5)\text{ または }(5,3))$$

$$=\frac{1}{18}$$ （答）



(3)

$$\mathrm{P}=\frac{12}{6\cdot 6} \qquad \leftarrow (\text{直径 } P_1P_4,\ P_2P_5,\ P_3P_6)$$

$$=\frac{12}{36}$$

$$=\frac{1}{3}$$ （答）