

学 力 検 査 問 題

数 学

数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲ
数学A，数学B，数学C

平成 26 年 2 月 25 日

自 9 時 00 分

至 11 時 30 分

答案作成上の注意

- 1 この問題冊子には，数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲ，数学A，数学B（数列，ベクトル），数学C（行列とその応用，式と曲線）の問題が5問あります。総ページは13ページで，問題は4ページ以降の偶数ページにあります。
- 2 解答用紙は5枚です。解答はすべて対応する番号の解答用紙の所定の解答欄（表面）に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。
- 3 受験番号は，それぞれの解答用紙の所定の欄（2ヶ所）に必ず記入しなさい。
- 4 試験終了後は，解答用紙の右上の番号の順に並べなさい。
- 5 配付した解答用紙は，持ち出してはいけません。
- 6 試験終了後，問題冊子は持ち帰ってください。

空 白

空 白

[1] a, b を実数, $a > 0$ として, 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ -2 & b \end{pmatrix}$ の定める 1 次変換を f

とする。 f によって, 点 $P(1, 0)$ が点 P_1 に移され, 点 P_1 が点 P_2 に移されるものとする。 P が線分 P_1P_2 の中点であるとき, 次の問いに答えよ。

(1) a, b を求めよ。

(2) ある実数 c に対して $c\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP_1} = (v_1, v_2)$ とすると,

$$A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

が成り立つ。 c を求めよ。

(3) $\overrightarrow{PP_1} = (w_1, w_2)$ とする。すべての自然数 n に対して

$$A^n \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = (-2)^n \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

が成り立つことを, 数学的帰納法によって証明せよ。

(4) (2) と (3) の v_1, v_2, w_1, w_2 に対して, $\overrightarrow{OP} = s(v_1, v_2) + t(w_1, w_2)$ とな

る実数 s, t を求め, $A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を n を用いて表せ。ただし, n は自然

数である。

空 白

[2] 二つの関数 $f(x) = x \sin x$, $g(x) = \sqrt{3} x \cos x$ について次の問いに答えよ。ただし, (3) と (4) において, a および $h(x)$ は (2) で定めたものとする。

(1) 2 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ の共有点のうち, x 座標が $-\pi \leq x \leq \pi$ であるものをすべて求めよ。

(2) (1) で求めた共有点のうち, x 座標が正である点を $A(a, f(a))$ とする。
点 A における曲線 $y = g(x)$ の接線を $y = h(x)$ と表す。 $h(x)$ を求めよ。

(3) $0 \leq x \leq a$ のとき, $h(x) \geq g(x)$ であることを示せ。

(4) $0 \leq x \leq a$ の範囲において, y 軸, 曲線 $y = g(x)$, および直線 $y = h(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

空 白

[3] 四面体 $OABC$ において $OA = OB = OC = AB = AC = 1$ とする。 $\triangle OAB$ の重心を F , $\triangle OAC$ の重心を G とし, 辺 OA の中点を M とする。また, $\angle BOC = 2\theta$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OF}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{FG} \parallel \overrightarrow{BC}$ であることを示せ。

(3) $\triangle MBC$ の面積を θ を用いて表せ。

空 白

[4] $\alpha > 1$ とする。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \alpha, a_{n+1} = \sqrt{\frac{2a_n}{a_n + 1}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める。次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(1) $a_n > 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

(2) $\sqrt{x} - 1 \leq \frac{1}{2}(x - 1) \quad (\text{ただし, } x \geq 0 \text{ とする。})$

(3) $a_n - 1 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} (\alpha - 1) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

空 白

[5] 1 辺の長さが 1 の正六角形において、頂点を反時計回りに $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ とする。1 個のさいころを 2 回投げて、出た目を順に j, k とする。 P_1, P_j, P_k が異なる 3 点となるとき、この 3 点を頂点とする三角形の面積を S とする。 P_1, P_j, P_k が異なる 3 点とならないときは、 $S = 0$ と定める。次の問いに答えよ。

(1) $S > 0$ となる確率を求めよ。

(2) S が最大となる確率を求めよ。

(3) S の期待値を求めよ。

空 白