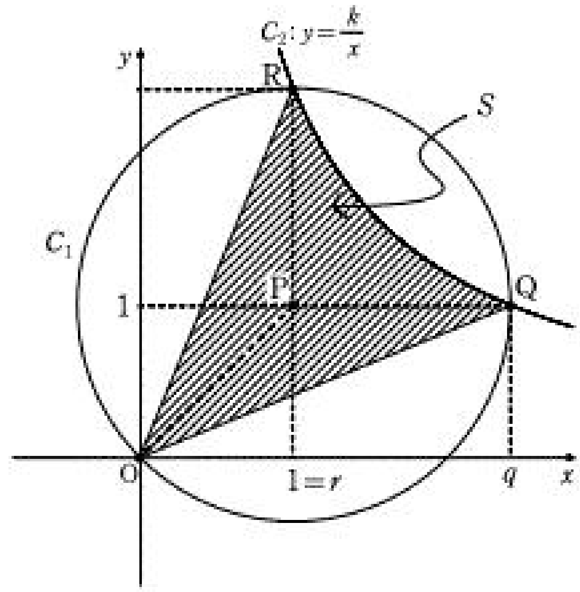
[1]



(1) $C_1 : (x-1)^2+(y-1)^2=2$

これより，　$\mathrm{Q}\left(\sqrt{2}+1, 1\right)$

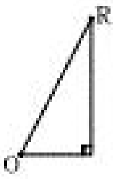
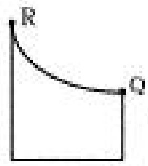
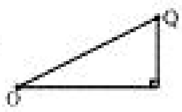
よって，　$\underline{q=\sqrt{2}+1}$　　…… (答)

ここで，　$\mathrm{P}_x=\mathrm{R}_x$ より，　$\underline{r=1}$　　…… (答)

$\mathrm{Q}\left(\sqrt{2}+1, 1\right)$ は $C_2 : y=\dfrac{k}{x}$ 上の点より，

$1=\dfrac{k}{\sqrt{2}+1}$　　よって，　$\underline{k=\sqrt{2}+1\ (>0)}$　　…… (答)

(2)

$S=$  $+$  $-$ 

$$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)+\int_1^{\sqrt{2}+1}\frac{\sqrt{2}+1}{x}\,dx-\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot 1$$

$$=\left(\sqrt{2}+1\right)\left[\log x\right]_1^{\sqrt{2}+1}$$

$$=\underline{\left(\sqrt{2}+1\right)\log\left(\sqrt{2}+1\right)}\qquad\text{…… (答)}$$

(3)

$I=\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}+1}\sqrt{2-(x-1)^2}\,dx$　　とおく．

$x=1+\sqrt{2}\sin\theta$

$dx=\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta$

x	$1 \to \sqrt{2}+1$
θ	$0 \to \frac{\pi}{2}$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\cos\theta\cdot\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$=\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\underline{\frac{\pi}{2}}\qquad\text{…… (答)}$$

(4)

$$V=\pi\int_1^{\sqrt{2}+1}\left\{1+\sqrt{2-(x-1)^2}\right\}^2dx-\pi\int_1^{\sqrt{2}+1}\left(\frac{\sqrt{2}+1}{x}\right)^2dx$$

$$=\pi\int_1^{\sqrt{2}+1}\left\{3-(x-1)^2+2\sqrt{2-(x-1)^2}-\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{x^2}\right\}dx$$

$$=\pi\left[3x-\frac{1}{3}(x-1)^3+\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{x}\right]_1^{\sqrt{2}+1}+2\pi\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=\underline{\left(\pi+\frac{4\sqrt{2}}{3}-2\right)\pi}\qquad\text{…… (答)}$$

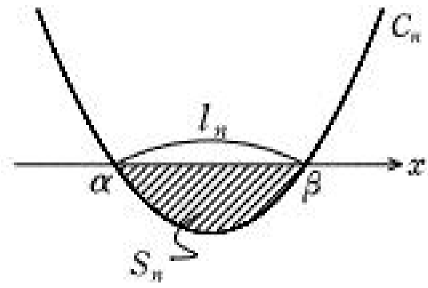
[2]

(1)

$$C_n : y = x^2 - p_n x + q_n$$
$$= \left(x - \frac{p_n}{2}\right)^2 - \frac{p_n{}^2}{4} + q_n$$

ここで、 $x^2 - p_n x + q_n = 0 \quad x = \alpha, \beta\ (\alpha < \beta) \leftarrow \left(D = p_n{}^2 - 4q_n > 0\right)$

とすると、 $\begin{cases} \alpha + \beta = p_n \\ \alpha\beta = q_n \end{cases}$



ここで、

$$l_n{}^2 = (\beta - \alpha)^2$$
$$= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$
$$= p_n{}^2 - 4q_n$$

よって、 $\left(C_n \text{ の頂点の } y \text{ 座標}\right) = -\frac{p_n{}^2}{4} + q_n = \underline{-\frac{l_n{}^2}{4}}$ ……（答）

(2) $S_n = -\int_\alpha^\beta (x - \alpha)(x - \beta)\,dx = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 = \frac{l_n{}^3}{6}$

よって、

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \left(\frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\frac{l_{n+1}{}^3}{6}}{\frac{l_n{}^3}{6}} = \left(\frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}\right)^3$$

よって、 $l_{n+1}{}^2 = \frac{(n+2)^2}{n(n+1)} l_n{}^2$

$(n \geq 2)\ l_n{}^2 = \frac{(n+1)^2}{(n-1)n} \cdot \frac{n^2}{(n-2)(n-1)} \cdot \frac{(n-1)^2}{(n-3)(n-2)} \cdot \cdots\cdots \frac{3^2}{1 \cdot 2} \cdot l_1{}^2 \quad \leftarrow \left(l_1{}^2 = 4\right)$

$$= n(n+1)^2$$

ゆえに、 $\underline{l_n = \sqrt{n}(n+1)\ \left(n = 1 \text{ もみたすので } n \geq 1\right)}$ ……（答）

(3) $p_n = n\sqrt{n}$ より、 $\left(n\sqrt{n}\right)^2 - 4q_n = n(n+1)^2 \Leftrightarrow \quad -4q_n = 2n^2 + n$

ゆえに、

$$\lim_{n\to\infty} n \log\left(-\frac{2q_n}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} n \log \frac{n^2 + \frac{n}{2}}{n^2}$$
$$= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \log\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}$$
$$= \frac{1}{2} \log e$$
$$= \underline{\frac{1}{2}}$$ ……（答）

[3]

(1)　直線 AB と x 軸との交点を F とする．

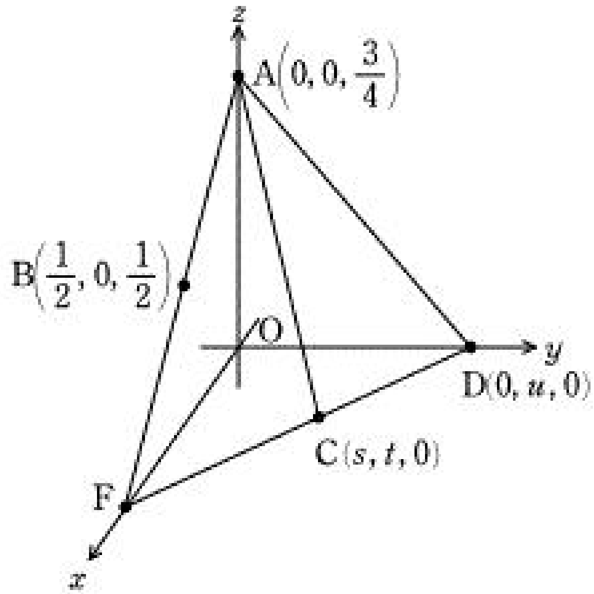
$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\left(0,0,\frac{3}{4}\right)+k\left(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{4}\right)\quad(k:\text{実数})$$

ここで，　$\frac{3}{4}-\frac{k}{4}=0$　より，　$k=3$

ゆえに，

$$\mathrm{F}\left(\frac{3}{2},0,0\right)$$

$$\underline{\mathrm{F}_x=\frac{3}{2}}\quad\cdots\cdots\text{（答）}$$



(2)　$\mathrm{C}(1-t,t,0)\ (0<t<1)$ と表せて，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}}&=\overrightarrow{\mathrm{OF}}+l\overrightarrow{\mathrm{FC}}\quad(l:\text{実数})\\&=\left(\frac{3}{2},0,0\right)+l\left(-t-\frac{1}{2},t,0\right)\end{aligned}$$

$$\begin{cases}\frac{3}{2}-l\left(t+\frac{1}{2}\right)=0\\ lt=u\end{cases}\qquad\text{ゆえに，}\quad \underline{u=\frac{3t}{2t+1}}\quad\cdots\cdots\text{（答）}$$

$u=\frac{3t}{2t+1}=\frac{3}{2}-\frac{\frac{3}{2}}{2t+1}$　は　$0<t<1$　において単調増加の関数より，

より　$0<u<1$　（題意は示された）

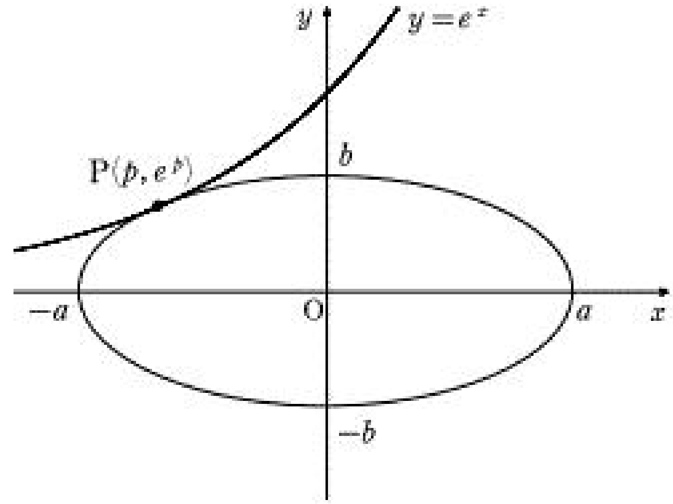
(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{12}{13}\overrightarrow{\mathrm{OE}}\Leftrightarrow\quad(0,u,0)=\frac{12}{13}(0,1,0)$　　　すなわち，　$u=\frac{12}{13}$

よって，

$$\begin{aligned}&\frac{3t}{2t+1}=\frac{12}{13}\\\Leftrightarrow\quad&39t=24t+12\\\Leftrightarrow\quad&15t=12\\\Leftrightarrow\quad&\underline{t=\frac{4}{5}}\ \ (0<t<1\text{をみたす})\end{aligned}\quad\cdots\cdots\text{（答）}$$

[4]

(1)　$y=e^x$ より，　$y'=e^x$



点 $\mathrm{P}\left(p,e^p\right)$ とおく．Pは C_2 上にあるので，

$$\frac{p^2}{a^2}+\frac{e^{2p}}{b^2}=1 \qquad \cdots\cdots ①$$

点Pにおける曲線 C_2 の接線は，

$$\frac{px}{a^2}+\frac{e^p y}{b^2}=1\left(\Leftrightarrow \quad y=-\frac{b^2 p}{a^2 e^p}x+\frac{b^2}{e^p}\right)$$

これより，　$e^p=-\dfrac{b^2p}{a^2e^p} \Leftrightarrow \quad \dfrac{e^{2p}}{b^2}=-\dfrac{p}{a^2}$ 　　$\cdots\cdots ②$

①，②より，　$\dfrac{p^2-p}{a^2}=1 \Leftrightarrow \quad p^2-p-a^2=0$ 　　ゆえに，　$p=\underline{\dfrac{1-\sqrt{1+4a^2}}{2}\left(<0\right)}$ 　$\cdots\cdots$（答）

(2)

$$\begin{aligned}
p+a&=\frac{1-\sqrt{1+4a^2}}{2}+a\\
&=\frac{1+2a-\sqrt{1+4a^2}}{2}\\
&=\frac{2a}{1+2a+\sqrt{1+4a^2}}\\
&=\frac{2}{\dfrac{1}{a}+2+\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+4}} \quad \to \quad \frac{1}{2}\ (a\to\infty)
\end{aligned}$$

ゆえに，　$\displaystyle\lim_{a\to\infty}(p+a)=\underline{\frac{1}{2}}$ 　　$\cdots\cdots$（答）

(3)

$$\frac{b^2e^{2a}}{a}=-\frac{a^2e^{2p}}{p}\cdot\frac{e^{2a}}{a}=-\frac{ae^{2(p+a)}}{p}=-\frac{2ae^{2(p+a)}}{1-\sqrt{1+4a^2}}=\frac{2e^{2(p+a)}}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+4}-\dfrac{1}{a}}$$

（②より）

$$\to e\ (a\to\infty)$$

ゆえに，　$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{b^2e^{2a}}{a}=\underline{e}$ 　$\cdots\cdots$（答）

[5]

(1)　m 種類の文字から 2 種類の文字の選び方は　${}_m\mathrm{C}_2$ 通り

よって，　${}_m\mathrm{C}_2\cdot(2^n-2)=\underline{m(m-1)(2^{n-1}-1)\text{（通り）}}$　……（答）

(2)　（1 種類のとき）　3 通り

（2 種類のとき）　$3(2^n-2)$ 通り

これらを取り除けばよく，

$$3^n-3(2^n-2)-3=\underline{3^n-3\cdot2^n+3\text{（通り）}}\quad\cdots\cdots\text{（答）}$$

(3)　a，b，c の 3 グループ分けで考える．（ただし，$a\geq0, b\geq0, c\geq0$）

（1 グループ）　1 通り

（2 グループ）　$\dfrac{2^n-2}{2!}=2^{n-1}-1$　通り

（3 グループ）　$\dfrac{3^n-3\cdot2^n+3}{3!}=\dfrac{3^{n-1}-2^n+1}{2}$　通り

ゆえに，

$$p_n=\frac{2^{n-1}-1}{1+(2^{n-1}-1)+\dfrac{3^{n-1}-2^n+1}{2}}$$

$$=\underline{\frac{2^n-2}{3^{n-1}+1}\ (n\geq3)}\quad\cdots\cdots\text{（答）}$$

(4)

$$p_n=\frac{2^n-2}{3^{n-1}+1}\leq\frac{1}{3}$$

$\Leftrightarrow\quad 3\cdot2^n-6\leq3^{n-1}+1$

$\Leftrightarrow\quad 3\cdot2^n-\dfrac{1}{3}\cdot3^n\leq7$

$\Leftrightarrow\quad 9\cdot2^n-3^n\leq21\quad\cdots\cdots$①

$(n=3)$　$9\cdot2^3-3^3=45$　（不適）

$(n=4)$　$9\cdot2^4-3^4=63$　（不適）

$(n=5)$　$9\cdot2^5-3^5=45$　（不適）

$(n=6)$　$9\cdot2^6-3^6=-153$　（適）

ここで，　$n\geq6$ のとき，

$9\cdot2^n-3^n=\underbrace{9\cdot2^n}_{(+)}\left\{1-\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n\right\}$ の 〰〰 部分は $1-\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n\leq1-\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{3}{2}\right)^6<0$

つまり，　$n\geq6$ のとき，　$9\cdot2^n-3^n<0$ となり①は成立．

よって，　$\underline{n\geq6}$　……（答）