[1]

(1) $C_1 : f(x)=x^2-x$, $f'(x)=2x-1$

$C_2 : g(x)=x^3+bx^2+cx-a$, $g'(x)=3x^2+26x+c$

とおく．

$$
\begin{aligned}
g(x)-f(x)&=x^3+(b-1)x^2+(c+1)x-a\\
&=(x-1)^2(x-\alpha) \qquad \cdots\cdots(\mathrm{Q}_x=\alpha\text{とする})\\
&=x^3-(\alpha+2)x^2+(2\alpha+1)x-\alpha
\end{aligned}
$$

これより，

$$
\begin{cases} b-1=-\alpha-2\\ c+1=2\alpha+1\\ -a=-\alpha \end{cases}
\quad \text{ゆえに，} \quad
\underline{\begin{cases} \alpha=a \ \left(\mathrm{Q}\left(a,\, a^2-a\right)\right)\\ b=-a-1\\ c=2a \end{cases}}
\quad \cdots\cdots \text{（答）}
$$

(2)

$l_1 : y=1(x-1) \quad (\Longleftrightarrow y=x-1)$

$l_2 : y=(2a-1)(x-a)+a^2-a \quad (\Longleftrightarrow y=(2a-1)x-a^2)$

$l_3 : y=a^2(x-a)+a^2-a \quad (\Longleftrightarrow y=a^2x-a^3+a^2-a)$

「l_1, l_2, l_3 が三角形を作らない」 $\Longleftrightarrow$ 「$\Bigl(\underbrace{l_1 /\!/ l_2 \text{ or } l_2 /\!/ l_3 \text{ or } l_3 /\!/ l_1}_{①}\Bigr)$ or $\Bigl(\underbrace{l_1, l_2, l_3 \text{ が1点で交わる}}_{②}\Bigr)$」

(i) ①のとき， $\underset{(a=1)}{2a-1=1}$ or $\underset{(a=1)}{a^2=2a-1}$ or $\underset{(a=\pm1)}{a^2=1}$

ここで， $a<1$ より， $a=-1$

(ii) ②のとき， l_2 と l_3 の交点 $\mathrm{Q}\left(a,\, a^2-a\right)$ を l_1 が通ればよく，

$$a^2-a=a-1$$

$$\Longleftrightarrow (a-1)^2=0 \qquad \text{よって，} a=1 \text{（不適）}$$

以上，(i)(ii)より， $\underline{a=-1}$ …… (答)

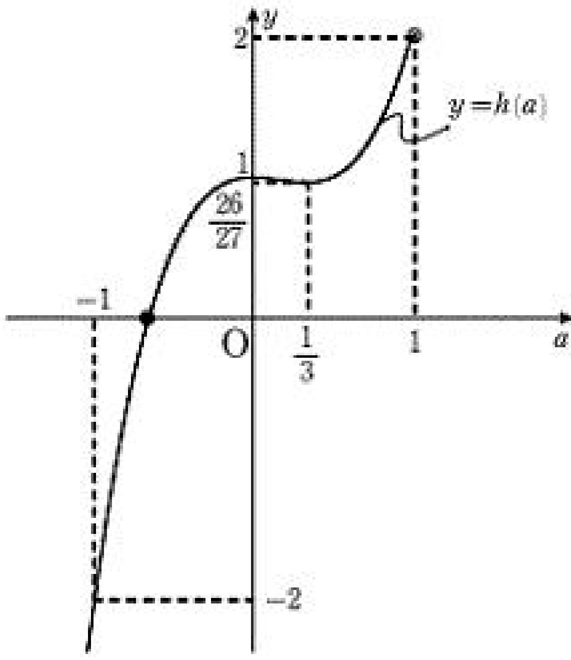
(3) (i) $l_1 \perp l_2$ のとき， $1\cdot(2a-1)=-1$ ゆえに，$\underline{a=0(1\text{個})}$

(ii) $l_2 \perp l_3$ のとき， $a^2\cdot(2a-1)=-1 \Longleftrightarrow 2a^3-a^2+1=0$

ここで， $h(a)=2a^3-a^2+1\,(a<1)$ とおく．

$$
\begin{aligned}
h'(a)&=6a^2-2a\\
&=6a\left(a-\frac{1}{3}\right)
\end{aligned}
$$

a	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	(1)
$h'(a)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(a)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{26}{27}$	$\nearrow$	(2)



$a<1$，$a \neq -1$ での $h(a)=0$ の実解は，$\underline{1\text{個}}$

(iii) $l_3 \perp l_1$ のとき， $a^2\cdot1=-1 \Longleftrightarrow a^2=-1$（実数 a は存在しない）

以上(i)〜(iii)より，a の個数は $\underline{2(\text{個})}$ …… (答)

[2]

(1) $r_n = \log_2 (n+1)\sqrt{n}$ より， $(n+1)\sqrt{n} = 2^{r_n}$

$$\frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{(n+2)\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}(n+1)} = \frac{2^{r_{n+1}}}{2^{r_n}} = \underline{2^{r_{n+1}-r_n}} \quad \cdots\cdots \text{(答)}$$

(2) $x^2 - p_n x + q_n = 0 \left(D = p_n{}^2 - 4q_n > 0 \text{ のもと}, x = \alpha_n, \beta_n \left(\alpha_n < \beta_n\right)\right)$

$$\begin{cases} \alpha_n + \beta_n = p_n \\ \alpha_n \beta_n = q_n \end{cases}$$

ゆえに，

$$c_n{}^2 = \left(\beta_n - \alpha_n\right)^2 = \left(\alpha_n + \beta_n\right)^2 - 4\alpha_n\beta_n$$
$$= p_n{}^2 - 4q_n \ (>0)$$
$$c_n = \sqrt{p_n{}^2 - 4q_n} \ (>0) \qquad \left(c_1 = \sqrt{p_1{}^2 - 4q_1{}^2} = 2\right)$$

……①

(1)を用いると， $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{2^{r_{n+1}}}{2^{r_n}}$

$$(n \geqq 2) \qquad \frac{c_n}{c_{n-1}} \cdot \frac{c_{n-1}}{c_{n-2}} \cdot \frac{c_{n-2}}{c_{n-3}} \cdot \cdots\cdots \cdot \frac{c_3}{c_2} \cdot \frac{c_2}{c_1} = \frac{2^{r_n}}{2^{r_{n-1}}} \cdot \frac{2^{r_{n-1}}}{2^{r_{n-2}}} \cdot \frac{2^{r_{n-2}}}{2^{r_{n-3}}} \cdot \cdots\cdots \cdot \frac{2^{r_3}}{2^{r_2}} \cdot \frac{2^{r_2}}{2^{r_1}}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{c_n}{2} = \frac{2^{r_n}}{2^1} \quad \left(r_1 = 1 \text{ より}\right)$$

よって， $\underline{c_n = 2^{r_n} = (n+1)\sqrt{n}}$ …… (答)

($n=1$ もみたすので，$n \geqq 1$)

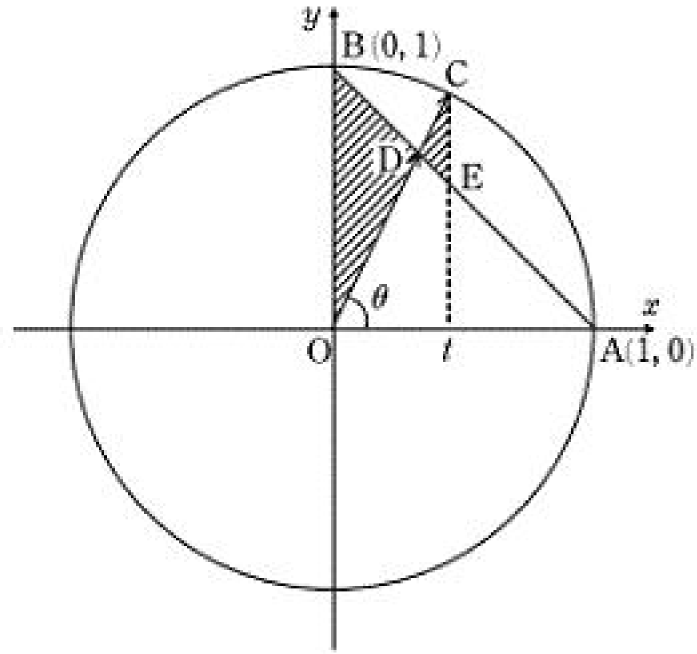
(3) $p_n = n\sqrt{n}$ のとき，①より，

$$c_n{}^2 = p_n{}^2 - 4q_n$$
$$\Longleftrightarrow (n+1)^2 n = n^3 - 4q_n$$
$$\Longleftrightarrow n^3 + 2n^2 + n = n^3 - 4q_n$$

よって， $q_n = \underline{-\dfrac{2n^2+n}{4}}$ …… (答)

[3]

(1) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=1\cdot1\cdot\cos\theta=t$ よって， $\begin{cases}\cos\theta=t\\ \sin\theta=\sqrt{1-t^2}\end{cases}$



$$\overrightarrow{OC}=\cos\theta\cdot\overrightarrow{OA}+\sin\theta\cdot\overrightarrow{OB}$$
$$=\underline{t\vec{a}+\sqrt{1-t^2}\,\vec{b}}\ \cdots\cdots\ (答)$$

(2)

$$\overrightarrow{OD}=k\overrightarrow{OC}\quad (k\text{: 実数})$$
$$=kt\vec{a}+k\sqrt{1-t^2}\,\vec{b}$$

ここで， $k\left(t+\sqrt{1-t^2}\right)=1 \iff k=\dfrac{1}{t+\sqrt{1-t^2}}$

よって，

$$\overrightarrow{OD}=\underline{\frac{1}{t+\sqrt{1-t^2}}\left(t\vec{a}+\sqrt{1-t^2}\,\vec{b}\right)}\quad\cdots\cdots\ (答)$$

(3) $\triangle OBD \backsim \triangle CED$ であり，相似比は $1:\underline{\sqrt{1-t^2}-(1-t)}$

$\left(\begin{array}{l}\text{円の上側の方程式}\quad y=\sqrt{1-t^2}\\ \text{直線ABの方程式}\quad x+y=1\end{array}\right)$

よって，面積比は $1^2:\left(\sqrt{1-t^2}+t-1\right)^2$

ここで， $\triangle OBD=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot\dfrac{t}{t+\sqrt{1-t^2}}=\dfrac{t}{2\left(t+\sqrt{1-t^2}\right)}$ より，

$$\triangle OBD+\triangle CDE=\frac{t}{2\left(t+\sqrt{1-t^2}\right)}\cdot\left\{1+\left(\sqrt{1-t^2}+t-1\right)^2\right\}$$
$$=\underline{\frac{t\left\{3-2t+2(t-1)\sqrt{1-t^2}\right\}}{2\left(t+\sqrt{1-t^2}\right)}}\quad\cdots\cdots\ (答)$$

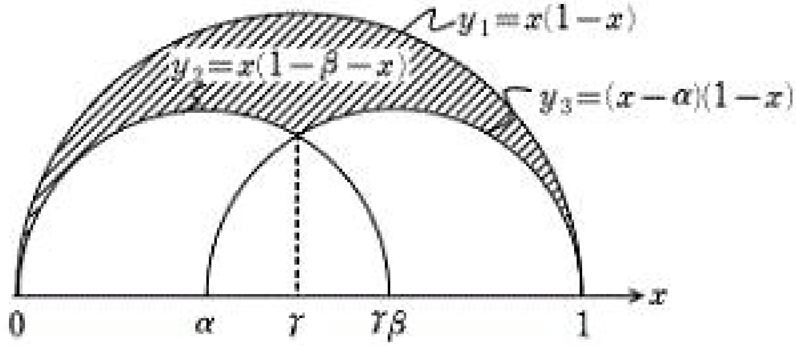
[4]

$C_1 : y_1 = x(1-x)$

$C_2 : y_2 = x(1-\beta-x)$

$C_3 : y_3 = (x-\alpha)(1-x)$

$\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \alpha+\beta < 1$ に注意してグラフを描くと右図の通り



(1)

$$x(1-\beta-x) = (x-\alpha)(1-x)$$

$\Longleftrightarrow x = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$　　　ゆえに，$\gamma = \underline{\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}}$ ……（答）

(2)

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{\gamma} (y_1 - y_2)\,dx + \int_{\gamma}^{1} (y_1 - y_3)\,dx \\
&= \int_0^{\gamma} \beta x\,dx + \int_{\gamma}^{1} \alpha(1-x)\,dx \\
&= \frac{\beta\gamma^2}{2} + \alpha(1-\gamma) - \alpha\left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma^2}{2}\right) \\
&= \frac{\beta}{2}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2 + \alpha\left(1 - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2 \qquad \left(\gamma = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) \\
&= \underline{\frac{\alpha\beta}{2(\alpha+\beta)}}
\end{aligned}$$
……（答）

(3)　相加平均・相乗平均の関係により，

$\dfrac{\alpha+\beta}{2} \geqq \sqrt{\alpha\beta} \iff \dfrac{1}{8} \geqq \sqrt{\alpha\beta}$　　ゆえに，$\dfrac{1}{64} \geqq \alpha\beta$ $\left(\text{等号成立は } \alpha=\beta=\dfrac{1}{8} \text{ のとき}\right)$

ここで，$S = \dfrac{\alpha\beta}{2\cdot\frac{1}{4}} = 2\alpha\beta \leqq \dfrac{1}{32}$

よって，$(S\text{の最大値}) = \underline{\dfrac{1}{32}}$ $\left(\alpha=\beta=\dfrac{1}{8} \text{ のとき}\right)$ ……（答）

[5]

(1)　n 回と $(n+1)$ 回の推移図を考える.

$$\begin{array}{lccc} & n\text{ 回} & & (n+1)\text{ 回} \\ (\text{B がボールを持つ}) & p_n & \xrightarrow{\times 0} & p_{n+1} \\ (\text{B 以外がボール持つ}) & 1-p_n & \nearrow \times\frac{1}{4} & 1-p_{n+1} \end{array}$$

ゆえに，　$p_{n+1}=\frac{1}{4}(1-p_n)\ (n\geqq 0)$　……①

①を使い，　$\underline{(p_0=0),\ p_1=\frac{1}{4},\ p_2=\frac{3}{16},\ p_3=\frac{13}{64},\ p_4=\frac{51}{256}}$　……（答）

(2)　①より，　$p_{n+1}-\frac{1}{5}=-\frac{1}{4}\left(p_n-\frac{1}{5}\right)$

数列 $\left\{p_n-\frac{1}{5}\right\}$ は，初項 $p_0-\frac{1}{5}=-\frac{1}{5}$，公比 $-\frac{1}{4}$ の等比数列とみて，

$$p_n-\frac{1}{5}=-\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$$

よって，　$p_n=\underline{\frac{1}{5}\left\{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right\}}$ $(n\geqq 0$ より, $n\geqq 1$ をみたす$)$　……（答）