

[1]

(1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= (s, s, s) \quad (s > 0) \\ \overrightarrow{d} &= \overrightarrow{OB} - t\overrightarrow{OA} \\ &= (-1, 1, 1) - t(s, s, s) \\ &= (-1-st, 1-st, 1-st)\end{aligned}$$

ここで、 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{d}$ より、

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{d} = s(-1-st) + s(1-st) + s(1-st) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1-3st=0$$

したがって、

$$\underline{t = \frac{1}{3s} \quad (s > 0) \dots\dots (\text{答})}$$

(2)

$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{d}$ のとき、(1)より、

$$t = \frac{1}{3s} \quad (s > 0) \dots\dots \textcircled{1}$$

$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{e}$ のとき、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{e} &= \overrightarrow{OC} - u\overrightarrow{OA} - v\overrightarrow{OB} \\ &= (0, 0, 1) - u(s, s, s) - v(-1, 1, 1) \\ &= (-su+v, -su-v, 1-su-v)\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{e} = s(-su+v) + s(-su-v) + s(1-su-v) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1-3su-v=0$$

$$\therefore 3su+v=1 \dots\dots \textcircled{2}$$

$\overrightarrow{d} \perp \overrightarrow{e}$ のとき、

$$\overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{e} = (-1-st)(-su+v) + (1-st)(-su-v) + (1-st)(1-su-v) = 0$$

$$\Leftrightarrow -4v+1=0 \quad \left(\textcircled{1} \text{より}, st = \frac{1}{3} \right)$$

したがって、

$$\begin{aligned}v &= \frac{1}{4} \\ u &= \frac{1}{4s} \quad (\textcircled{2} \text{より})\end{aligned} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(3)

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OD} \\ \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OE} \\ \overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{OE} \end{cases} \text{を全て満たす四面体 OADE は右図の通り}$$

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{s^2 + s^2 + s^2} = \sqrt{3}s$$

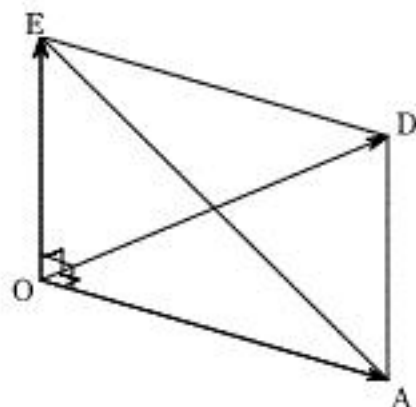
$$\overrightarrow{OD} = \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) \text{より}, |\overrightarrow{OD}| = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$\overrightarrow{OE} = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \text{より}, |\overrightarrow{OE}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore V = \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}s \cdot \frac{2\sqrt{6}}{3} \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{3} = 2$$

したがって、

$$\underline{s=6} \quad \dots\dots (\text{答})$$



[2]

(1)

$$y = \frac{e^x - ae^{-x}}{2}$$

$$\Leftrightarrow (e^x)^2 - 2ye^x - a = 0$$

$$\therefore e^x = y + \sqrt{y^2 + a} \quad (>0)$$

$$\left(\Leftrightarrow x = \log(y + \sqrt{y^2 + a}) \right)$$

したがって,

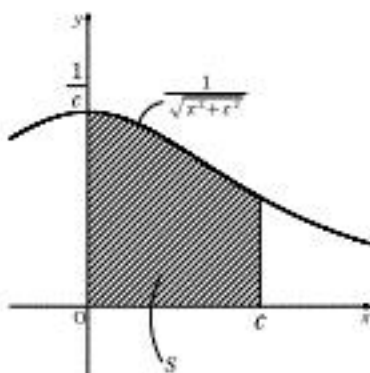
$$\underline{f^{-1}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + a})} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(2)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f^{-1}(x) &= \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + a}}}{x + \sqrt{x^2 + a}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + a} + x}{\sqrt{x^2 + a}(x + \sqrt{x^2 + a})} \\ &= \underline{\frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}} \quad \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} S &= \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{x^2 + c^2}} \\ &\quad \swarrow \text{((2)の結果を利用)} \\ &= \left[\log(x + \sqrt{x^2 + c^2}) \right]_0^c \\ &= \log(c + \sqrt{2}c) - \log c \\ &= \underline{\log(1 + \sqrt{2})} \quad \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$



[3]

$$z_{n+1} - z_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) (z_n - z_{n-1}) \quad (n=1, 2, 3, \dots, z_0=0)$$

$\frac{1+i}{2} (-i)$

(1)

$$z_1 = 1$$

$$z_2 = \frac{3}{2} + \frac{i}{2}$$

$$z_3 - \left(\frac{3}{2} + \frac{i}{2} \right) = \frac{1+i}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{i}{2} - 1 \right) \quad \therefore \underline{z_3 = \frac{3}{2} + i} \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$z_4 - \left(\frac{3}{2} + i \right) = \frac{1+i}{2} \left(\frac{3}{2} + i - \frac{3}{2} - \frac{i}{2} \right) \quad \therefore \underline{z_4 = \frac{5}{4} + \frac{5}{4}i} \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$(2) \quad z_{n+1} - z_n = \alpha^n \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

$$(n \geq 1) \quad z_n = z_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k$$

$$= \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} \quad (n=0 \text{ もみたす}) \quad \therefore \underline{z_n = \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad \dots\dots (\text{答})$$

(3)

$$\alpha^n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right) \leftarrow (\text{ド・モアブルの定理})$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = 0$$

よって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\frac{1+i}{2}} = 1+i \quad \therefore \underline{w=1+i} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(4)

$$z_n = \frac{1}{1-\frac{1+i}{2}} \left[1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right) \right] \text{ より,}$$

$$(z_n \text{ の実部}) = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \cos \frac{n\pi}{4} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \sin \frac{n\pi}{4} > 1 \text{ とおく.}$$

$$\sin \frac{n\pi}{4} > \cos \frac{n\pi}{4}$$

$$\therefore \underline{n = \begin{cases} 8k+2 \\ 8k+3 \\ 8k+4 \end{cases}} \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad \dots\dots (\text{答})$$

[4]

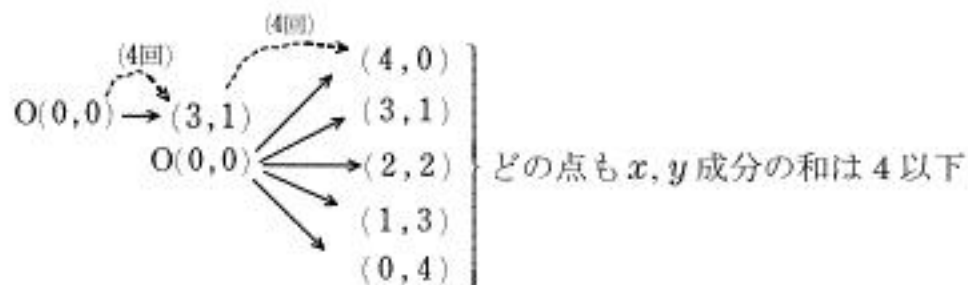
$$(1) \quad 4 \text{ 回} \begin{cases} \text{(オ)} \cdots \cdots 3 \text{ 回} \\ \text{(ウ)} \cdots \cdots 1 \text{ 回} \end{cases}$$

$${}_4C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \cdots \cdots (\text{答})$$

$$(2) \quad 8 \text{ 回} \begin{cases} \text{(オ)} \cdots \cdots 5 \text{ 回} \\ \text{(ウ)} \cdots \cdots 1 \text{ 回} \end{cases} \text{ のうち, } \begin{cases} \text{(オ)} \cdots \cdots 3 \text{ 回} \\ \text{(ウ)} \cdots \cdots 1 \text{ 回} \end{cases} \text{ かつ } \begin{cases} \text{(オ)} \cdots \cdots 2 \text{ 回} \\ \text{(ウ)} \cdots \cdots 2 \text{ 回} \end{cases} \text{ を除いたもの}$$

$$\begin{aligned} & {}_8C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^8 - \frac{1}{4} \cdot {}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ &= \frac{56}{256} - \frac{6}{64} \\ &= \frac{1}{8} \cdots \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

(3)



ちなみに、途中(3,1)を通らないケースでは、 x, y 成分の和はすべて 4 より大きくなる。

$$\frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4} \cdots \cdots (\text{答})$$

(4)

$$4n(\text{回}) = \underbrace{4(n-k)(\text{回})}_{\substack{(n-k)(\text{回}) \\ O(0,0) \rightarrow (3,1) \\ \text{が起こる。}}} + \underbrace{4k(\text{回})}_{\substack{\text{任意} \\ \left(\begin{array}{l} \text{どの点に移動しても} \\ x, y \text{ 成分の和は } 4k \text{ 以下} \end{array} \right)}}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} \cdot 1^{4k} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} \cdots \cdots (\text{答})$$

[5]

- (1) 基本周期を l とおくと、題意より、 $l = 4m$ ($m \geq 1$)
 ($n \geq k$) (k は循環の始まりの数)

$$\begin{aligned} 2^{n+l} - 2^n &= 2^n (2^{4m} - 1) \\ &= 2^n (4^m + 1)(4^m - 1) = 100L \quad (L \text{ は整数}) \\ &\quad (= 2^2 \cdot 5^2 \cdot L) \end{aligned}$$

$4^m + 1$ と $4^m - 1$ は同時に 5 で割り切れないから、片方が 25 で割り切れる最小の自然数 m を調べると、

($m = 5$ のとき)

$$\begin{aligned} \begin{cases} 4^5 + 1 = 1025 = \widehat{(25)} \cdot 41 \\ 4^5 - 1 = 1023 \end{cases} \\ \therefore \underline{l = 4 \cdot 5 = 20} \quad \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

さらに、 $n \geq 2$ より、

$$k = 2 \rightarrow \underline{x_2 = 4} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(2)

25 で割って 1 余る 2 桁の自然数は 26, 51, 76 の 3 数.

このうち、4 の倍数は 76 ($=A$) $\dots\dots (\text{答})$

(3)

125 で割って 1 余る 3 桁の自然数は 126, 251, 376, 501, 626, 751, 876.

このうち、8 の倍数は 376 ($=B$) $\dots\dots (\text{答})$

(4) (1)を用いると、

$$\begin{aligned} 2^n (2^l - 1) &= 1000L' \quad (L' \text{ は整数}, n \geq k') \\ &\quad (= 2^3 \cdot 5^3 \cdot L') \end{aligned}$$

$n \geq 3$ より、 $k' = 3 \rightarrow \underline{x_3 = 8} \quad \dots\dots (\text{答})$

$2^l - 1$ が $5^3 (= 125)$ で割り切れる最小の自然数 l は
 問題の条件により、

$$\underline{l = 100} \quad \dots\dots (\text{答})$$