

学 力 検 査 問 題

数 学

数学Ⅰ，数学Ⅱ，
数学A，数学B

平成 28 年 2 月 25 日

自 9 時 00 分

至 11 時 00 分

答案作成上の注意

- 1 この問題冊子には，数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学A，数学B（数列，ベクトル）の問題が5問あります。総ページは13ページで，問題は4ページ以降の偶数ページにあります。
- 2 解答用紙は5枚です。解答はすべて対応する番号の解答用紙の所定の解答欄（表面）に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。
- 3 受験番号は，それぞれの解答用紙の所定の欄（2ヶ所）に必ず記入しなさい。
- 4 試験終了後は，解答用紙の右上の番号の順に並べなさい。
- 5 配付した解答用紙は，持ち出してはいけません。
- 6 試験終了後，問題冊子は持ち帰ってください。

〔 1 〕 a を正の定数とし、座標平面上において、

$$\text{円 } C_1 : x^2 + y^2 = 1, \quad \text{放物線 } C_2 : y = ax^2 + 1$$

を考える。 C_1 上の点 $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ における C_1 の接線 ℓ は点 $Q(s, t)$ で C_2 に接している。次の問いに答えよ。

(1) s, t および a を求めよ。

(2) C_2, ℓ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(3) 円 C_1 上の点が点 P から点 $R(0, 1)$ まで反時計回りに動いてできる円弧を C_3 とする。 C_2, ℓ および C_3 で囲まれた部分の面積を求めよ。

〔 2 〕 四角形 ABCD において,

$$\angle DAB = \angle DBC = 90^\circ, \quad \angle BCD = 60^\circ, \quad AB = AD, \quad BC = 1$$

とする。次の問いに答えよ。

(1) 対角線 BD の長さの 2 乗 BD^2 を求めよ。

(2) 対角線 AC の長さの 2 乗 AC^2 を求めよ。

(3) $\angle BAC = \alpha$, $\angle ACD = \beta$ とおくとき, $\cos^2 \alpha$, $\cos^2 \beta$ を求めよ。

〔 3 〕 座標空間に 4 点

$$O(0, 0, 0), \quad A(s, s, s), \quad B(-1, 1, 1), \quad C(0, 0, 1)$$

がある。ただし、 $s > 0$ とする。 t, u, v を実数とし、

$$\vec{d} = \vec{OB} - t\vec{OA}, \quad \vec{e} = \vec{OC} - u\vec{OA} - v\vec{OB}$$

とおく。次の問いに答えよ。

(1) $\vec{OA} \perp \vec{d}$ のとき、 t を s を用いて表せ。

(2) $\vec{OA} \perp \vec{d}$, $\vec{OA} \perp \vec{e}$, $\vec{d} \perp \vec{e}$ のとき、 u, v を s を用いて表せ。

(3) (2) のとき、2 点 D, E を

$$\vec{OD} = \vec{d}, \quad \vec{OE} = \vec{e}$$

となる点とする。四面体 OADE の体積が 2 であるとき、 s の値を求めよ。

〔 4 〕 xy 平面上に原点を出発点として動く点 Q があり、次の試行を行う。

1 枚の硬貨を投げ、表が出たら Q は x 軸の正の方向に 1、裏が出たら y 軸の正の方向に 1 動く。ただし、点 $(3, 1)$ に到達したら Q は原点に戻る。

この試行を n 回繰り返した後の Q の座標を (x_n, y_n) とする。次の問いに答えよ。

(1) $(x_4, y_4) = (0, 0)$ となる確率を求めよ。

(2) $(x_8, y_8) = (5, 3)$ となる確率を求めよ。

(3) $x_8 + y_8 \leq 4$ となる確率を求めよ。

(4) $x_{4n} + y_{4n} \leq 4k$ となる確率を n と k で表せ。ここで k は n 以下の自然数とする。

〔 5 〕 n を 2 以上の自然数とする。次の問いに答えよ。

- (1) 変数 x のデータの値が $x_1, x_2, \dots, x_n$ であるとし、

$$f(a) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - a)^2$$

とする。 $f(a)$ を最小にする a は $x_1, x_2, \dots, x_n$ の平均値で、そのときの最小値は $x_1, x_2, \dots, x_n$ の分散であることを示せ。

- (2) c を定数として、変数 y, z の k 番目のデータの値が

$$y_k = k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

$$z_k = ck \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

であるとする。このとき $y_1, y_2, \dots, y_n$ の分散が $z_1, z_2, \dots, z_n$ の分散より大きくなるための c の必要十分条件を求めよ。

- (3) 変数 x のデータの値が $x_1, x_2, \dots, x_n$ であるとし、その平均値を $\bar{x}$ とする。新たにデータを得たとし、その値を x_{n+1} とする。 $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ の平均値を $x_{n+1}, \bar{x}$ および n を用いて表せ。

- (4) 次の 40 個のデータの平均値、分散、中央値を計算すると、それぞれ、ちょうど 40, 670, 35 であった。

120	10	60	70	30	20	20	30	20	60
40	50	40	10	30	40	40	30	20	70
100	20	20	40	40	60	70	20	50	10
30	10	50	80	10	30	70	10	60	10

新たにデータを得たとし、その値が 40 であった。このとき、41 個のすべてのデータの平均値、分散、中央値を求めよ。ただし、得られた値が整数でない場合は、小数第 1 位を四捨五入せよ。