〔１〕

(1)

$$a_2=\frac{a_1}{\sqrt{{a_1}^2+1}+1}=\frac{\tan\frac{\pi}{3}}{\sqrt{\tan^2\frac{\pi}{3}+1}+1}=\frac{\tan\frac{\pi}{3}}{\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}}+1}=\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{1+\cos\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}}{2\cos^2\frac{\pi}{6}}=\underline{\tan\frac{\pi}{6}\ \left(=\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\quad\text{（証明終）}}$$

$$a_3=\frac{a_2}{\sqrt{{a_2}^2+1}+1}=\frac{\tan\frac{\pi}{6}}{\sqrt{\tan^2\frac{\pi}{6}+1}+1}=\frac{\tan\frac{\pi}{6}}{\frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}}+1}=\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{1+\cos\frac{\pi}{6}}$$

$$=\underline{\tan\frac{\pi}{12}\quad\text{（証明終）}}$$

(2)　「$a_n=\tan\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}$ $(n=1,2,3,\cdots\cdots)$」……(＊)と推定．

（Ⅰ）$n=1$のとき，$a_1=\tan\frac{\pi}{3}$となり，成立．

（Ⅱ）$n=k$で成立と仮定．つまり，$a_k=\tan\frac{\pi}{3\cdot 2^{k-1}}$とする．

$$a_{k+1}=\frac{a_k}{\sqrt{{a_k}^2+1}+1}=\frac{\tan\frac{\pi}{3\cdot 2^{k-1}}}{\sqrt{\tan^2\frac{\pi}{3\cdot 2^{k-1}}+1}+1}=\frac{\tan\frac{\pi}{3\cdot 2^{k-1}}}{\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3\cdot 2^{k-1}}}+1}=\tan\frac{\pi}{3\cdot 2^k}$$

$n=k$で成立すれば，$n=k+1$でも成立．

以上(Ⅰ)(Ⅱ)より，自然数nに対して(＊)は成立　　　（証明終）

(3)

$$\lim_{n\to\infty}2^n a_n=\lim_{n\to\infty}2^n\cdot\tan\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}}{\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}}}_{\to 1}\cdot\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}\cdot\frac{2^n}{\cos\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}}$$

$$=\underline{\frac{2}{3}\pi\qquad\text{（答）}}$$

［別解］

$\frac{1}{2^{n-1}}=t$とおくと，$n\to\infty$のとき，$t\to 0$

$$\lim_{n\to\infty}2^n a_n=\lim_{t\to 0}\frac{2}{t}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{3}t}{\cos\frac{\pi}{3}t}=\lim_{t\to 0}\underbrace{\frac{\sin\frac{\pi}{3}t}{\frac{\pi}{3}t}}_{\to 1}\cdot\frac{\pi}{3}\cdot\frac{2}{\underbrace{\cos\frac{\pi}{3}t}_{\to 1}}$$

$$=\underline{\frac{2}{3}\pi}$$

〔2〕

(1)

$$f(t)=t^3-2at+1 \quad (t \geqq 0)$$
$$f'(t)=3t^2-2a$$

t	0	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{2a}{3}}$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	1	↘	(最小)	↗

$$\therefore\ (\text{最小値})=f\left(\sqrt{\frac{2a}{3}}\right)=-\frac{4a}{9}\sqrt{6a}+1 \qquad (\text{答})$$

(2)

$$(\text{最小値})=-\frac{4a}{9}\sqrt{6a}+1=0$$
$$\iff\ a\sqrt{6a}=\frac{9}{4}$$
$$\therefore\ 6a^3=\frac{81}{16}\ \left(a^3=\frac{27}{32}\right) \qquad \therefore\ A^3=\frac{27}{32} \quad (\text{答})$$

(3) $y=x^4$ と $x^2+(y-a)^2=a^2$ を連立して,

$$x^2+(x^4-a)^2=a^2$$
$$\iff\ x^8-2ax^4+x^2=0$$
$$\iff\ x^2(x^6-2ax^2+1)=0$$

ここで, $x^6-2ax^2+1=0$ の実数解を $t=x^2$ $(\geqq 0)$ として考える.

$t^3-2at+1=0$ $(t \geqq 0)$ ←((1)のグラフを利用)

(i) $-\dfrac{4a}{9}\sqrt{6a}+1>0$ $\left(0<a<\dfrac{3}{2\sqrt[3]{4}}\right)$ のとき,

$x=0$ の 1個

(ii) $-\dfrac{4a}{9}\sqrt{6a}+1=0$ $\left(a=\dfrac{3}{2\sqrt[3]{4}}\right)$ のとき,

$t=x^2=\sqrt{\dfrac{2a}{3}}$ の 2 個と $x=0$ の 1 個を合わせて 3 個

(iii) $-\dfrac{4a}{9}\sqrt{6a}+1<0$ $\left(a>\dfrac{3}{2\sqrt[3]{4}}\right)$ のとき,

$x^6-2ax^2+1=0$ からの 4 個と $x=0$ の 1 個を合わせて 5 個

以上まとめて,

$$\begin{cases} 1\,(\text{個}) & \left(0<a<\dfrac{3}{2\sqrt[3]{4}}\right) \\ 3\,(\text{個}) & \left(a=\dfrac{3}{2\sqrt[3]{4}}\right) \\ 5\,(\text{個}) & \left(a>\dfrac{3}{2\sqrt[3]{4}}\right) \end{cases} \qquad (\text{答})$$

(4) 点 $\mathrm{P}(x,x^4)$ とおくと, 点 $(0,a)$ との距離 l について,

$$l^2=x^2+(x^4-a)^2 \geqq a^2 \ \leftarrow (l \geqq a)$$
$$\iff\ x^2(x^6-2ax^2+1) \geqq 0$$
$$\iff\ x^6-2ax^2+1 \geqq 0$$
$$\iff\ ((1)\text{の最小値}) \geqq 0 \qquad \therefore\ 0<a \leqq \frac{3}{2\sqrt[3]{4}} \quad (\text{答})$$

(3)より

〔3〕

(1)

$$P_2=p(1-p)+(1-p)p=\underline{2p(1-p)}\qquad\text{(答)}$$

$$P_3=p^3+(1-p)^3=\underline{3p^2-3p+1}\qquad\text{(答)}$$

(2)

$$(\mathrm{A})\to\underbrace{\mathrm{B}\to\mathrm{C}\to\mathrm{B}\to\mathrm{C}\to\cdots\cdots\to\mathrm{C}\to\mathrm{B}}_{2m-1\,(\text{回})}\to\mathrm{A}$$

or

$$(\mathrm{A})\to\underbrace{\mathrm{C}\to\mathrm{B}\to\mathrm{C}\to\mathrm{B}\to\cdots\cdots\to\mathrm{B}\to\mathrm{C}}_{2m-1\,(\text{回})}\to\mathrm{A}$$

$$\therefore\ P_{2m}=p\{p(1-p)\}^{m-1}\cdot(1-p)+(1-p)\{(1-p)p\}^{m-1}\cdot p$$

$$=\underline{2\{p(1-p)\}^{m}}\qquad\text{(答)}$$

同様に考えて,

$$P_{2m+1}=p\{p(1-p)\}^{m-1}\cdot p\cdot p+(1-p)\{(1-p)p\}^{m-1}\cdot(1-p)(1-p)$$

$$=\{p^3+(1-p)^3\}\{p(1-p)\}^{m-1}$$

$$=\underline{(3p^2-3p+1)\{p(1-p)\}^{m-1}}\qquad\text{(答)}$$

(3) $p=\dfrac{1}{2}$ より，(2)の結果を用いて,

$$P_{2m}=2\left(\frac{1}{4}\right)^{m}=\underline{\underline{\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-1}}},\ P_{2m+1}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{m-1}=\underline{\underline{\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}}}$$

1回目にAに戻るのが $2m$ 回目 $(1\leqq m\leqq N)$　かつ　残り $2N+3-2m$ 回で再びAに戻る.

$$P_{2m}\cdot P_{2N+3-2m}=P_{2m}\cdot P_{2(N-m+1)+1}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2(N-m+1)}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1}\ (1\leqq m\leqq N)$$

1回目にAに戻るのが $2m+1$ 回目 $(1\leqq m\leqq N)$　かつ　残り $2N-2m+2$ 回で再びAに戻る.

$$P_{2m+1}\cdot P_{2(N-m+1)}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2(N-m+1)-1}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1}\qquad(1\leqq m\leqq N)$$

以上より,

$$Q=\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1}+\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1}$$

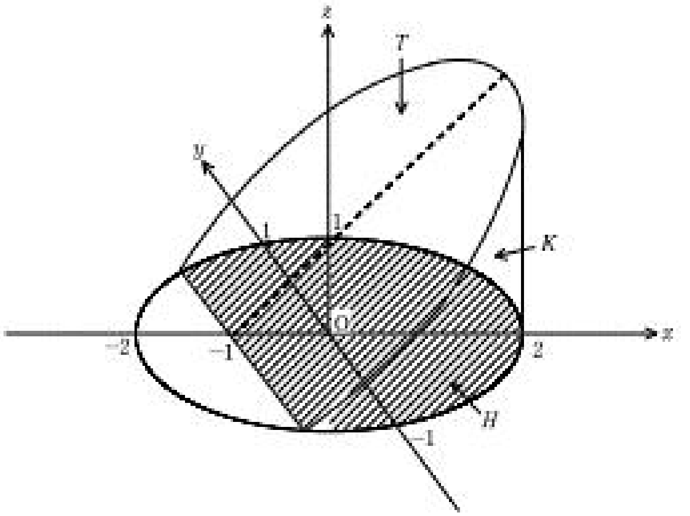
$$=\frac{N}{2^{2N+1}}+\frac{N}{2^{2N+1}}$$

$$=\underline{\frac{N}{2^{2N}}\quad\text{(答)}}$$

〔4〕

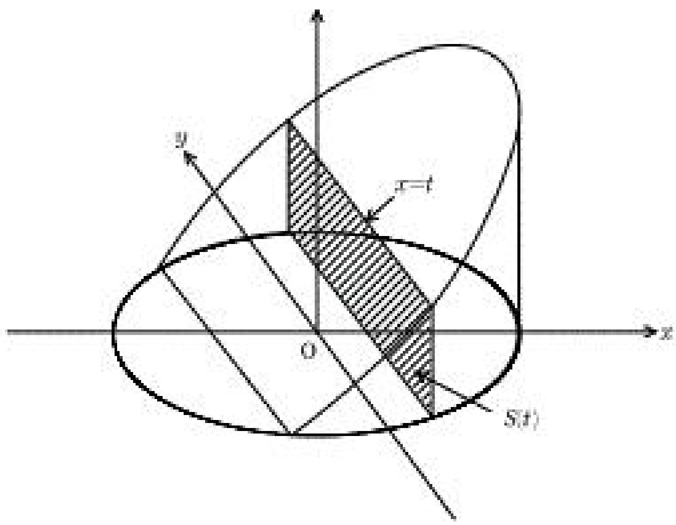
(1)

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1 \iff y=\pm\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$$
$$=\pm\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$$



求める右図の斜線部分の面積を S とすると，

$$\begin{aligned}S&=2\int_{-1}^{2}\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}\,dx\\&=\int_{-1}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx\\&=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}\\&=\underline{\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}\quad(\text{答})}\end{aligned}$$



(2) $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ において， $x=t$ $(-1<t<2)$ を代入.

$$y^2=1-\frac{t^2}{4}\qquad \therefore\ y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{4-t^2}$$

次に，平面 T の方程式は， $z=x+1$ より，

$x=t$ $(-1<t<2)$ を代入. $z=t+1$

$$\begin{aligned}\therefore\ S(t)&=\sqrt{4-t^2}\,(t+1)\\&=\underline{(t+1)\sqrt{4-t^2}\quad(-1<t<2)\quad(\text{答})}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}V&=\int_{-1}^{2}S(t)\,dt\\&=\int_{-1}^{2}t\sqrt{4-t^2}\,dt+\underline{\int_{-1}^{2}\sqrt{4-t^2}\,dt}\end{aligned}$$

(1) を利用

$$\begin{aligned}&=\left[-\frac{1}{3}(4-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{2}+\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=\frac{1}{3}\cdot 3\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=\underline{\frac{4}{3}\pi+\frac{3}{2}\sqrt{3}\quad(\text{答})}\end{aligned}$$

〔5〕

(1) $\mathrm{P}(s,t)$ （ただし，s と t は整数）とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(50,14)$ に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=50s+14t=6$$

解の1組として，

$$(s,t)=(-1,4) \qquad \therefore\ \underline{\mathrm{P}(-1,4)\quad（答）}$$

(2) $\mathrm{P}(x,y)$ （ただし，x と y は整数）とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=50x+14y=6 \iff 50(x+1)=14(4-y)$$
$$\iff 25(x+1)=7(4-y)\ \cdots\cdots ①$$

①において，25 と 7 は互いに素な整数より，整数 l を用いて，

$$\begin{cases}x+1=7l\\4-y=25l\end{cases} \quad \therefore \begin{cases}x=7l-1\\y=4-25l\end{cases} \quad (l:整数)$$

ここで，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}^2&=(7l-1)^2+(4-25l)^2\\&=674l^2-214l+17\\&=674\left(l-\frac{107}{674}\right)^2+\cdots\cdots\end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\left(0<\overset{(軸)}{\frac{107}{674}}<\frac{1}{2}\right)}}$$

$$(l=0)\rightarrow\ \mathrm{P}_1(-1,4)$$
$$\underline{(l=1)\rightarrow\ \mathrm{P}_2(6,-21)\qquad（答）}$$

(3) $0<\dfrac{107}{674}<\dfrac{1}{2}$ に注意すれば，$\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2,\mathrm{P}_3,\mathrm{P}_4,\cdots\cdots$ の順から，

$$\mathrm{P}_{2k}(7k-1,4-25k),\mathrm{P}_{2k+1}(-7k-1,4+25k),\mathrm{P}_{2k+2}(7k+6,-21-25k)$$
$$\therefore\ \underline{\overrightarrow{\mathrm{P}_{2k}\mathrm{P}_{2k+1}}=(-14k,50k),\overrightarrow{\mathrm{P}_{2k}\mathrm{P}_{2k+2}}=(7,-25)\quad（答）}$$

(4) (3)を用いると，

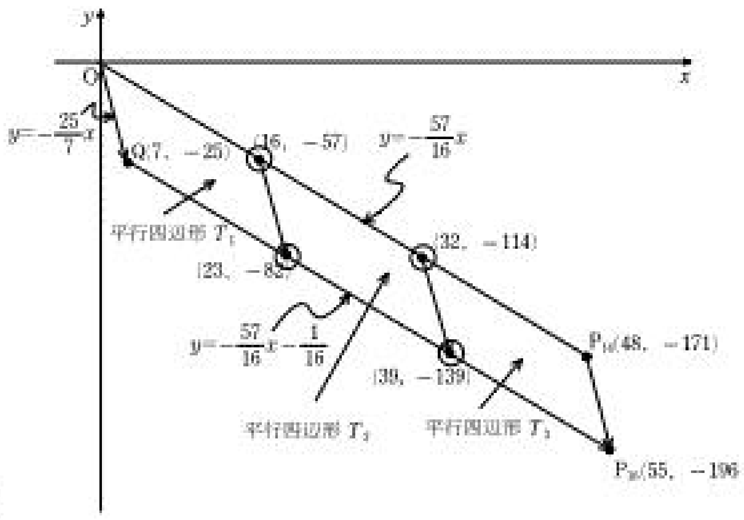
$$\mathrm{P}_{14}(48,-171),\mathrm{P}_{16}(55,-196)$$
$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(7,-25)$$

$$\begin{aligned}&(平行四辺形\mathrm{OQP}_{16}\mathrm{P}_{14}の面積)\\&=\frac{1}{2}\cdot2\left|48\cdot(-25)-7\cdot(-171)\right|\\&=3\end{aligned}$$

さらに，右図の通り各平行四辺形 $T_1\sim T_3$ を決める．

$$(T_1の面積)=(T_2の面積)=(T_3の面積)=1$$

<u>面積が1の T_1,T_2,T_3 の内部には格子点は存在しない．</u>



（証明）

面積が1の4頂点が全て格子点の平行四辺形の内部に少なくとも1点格子点$(m,\ n)$が存在するとした場合，

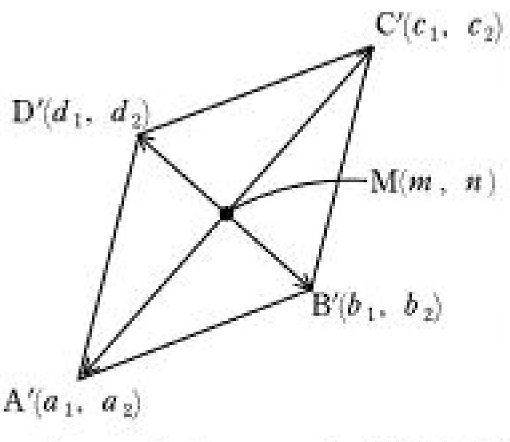
$$\triangle\mathrm{MA'B'}=\frac{1}{2}\left|(a_1-m)(b_2-n)-(a_2-n)(b_1-m)\right|\geqq\frac{1}{2}$$

同様に，$\triangle\mathrm{MB'C'}\geqq\dfrac{1}{2},\triangle\mathrm{MC'D'}\geqq\dfrac{1}{2},\triangle\mathrm{MD'A'}\geqq\dfrac{1}{2}$

となり，$(平行四辺形\ \mathrm{A'B'C'D'}\ の面積)\geqq\dfrac{1}{2}\cdot4=2$

となり矛盾．

面積1の4頂点が全て格子点の平行四辺形の内部には格子点は存在しない．



$(a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2,d_1,d_2$ は全て整数$)$

よって，求める格子点は右上図を参考に，

$$\underline{(0,0),(7,-25),(16,-57),(23,-82),(32,-114),(39,-139),(48,-171),(55,-196)\quad（答）}$$