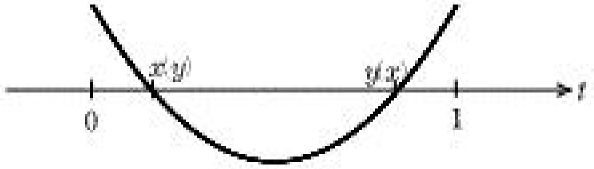
[1]

(1)

$$f(t)=t^2-ut+v$$
$$=\left(t-\frac{u}{2}\right)^2+v-\frac{u^2}{4}$$ とおく．

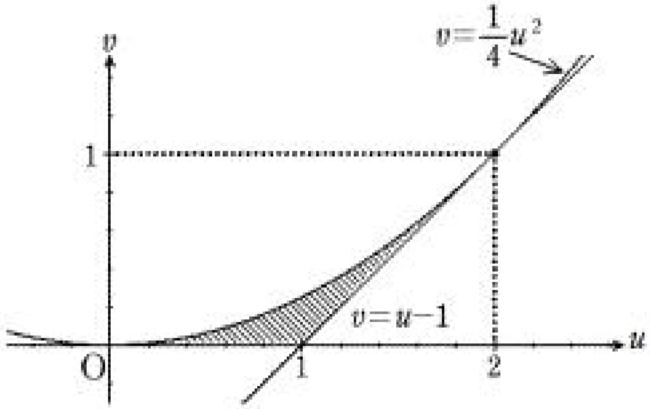


$\begin{cases} u=x+y \\ v=xy \end{cases}$ で　$0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1$ より，

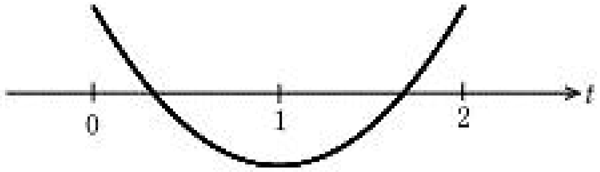
$$\begin{cases} D=u^2-4v\geqq 0 \\ 0\leqq \dfrac{u}{2}\leqq 1 \\ f(0)=v\geqq 0 \\ f(1)=1-u+v\geqq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} v\leqq \dfrac{1}{4}u^2 \\ 0\leqq u\leqq 2 \\ v\geqq 0 \\ v\geqq u-1 \end{cases}$$

uv 平面に図示すると，右図の斜線部分

（ただし，境界を含む）．



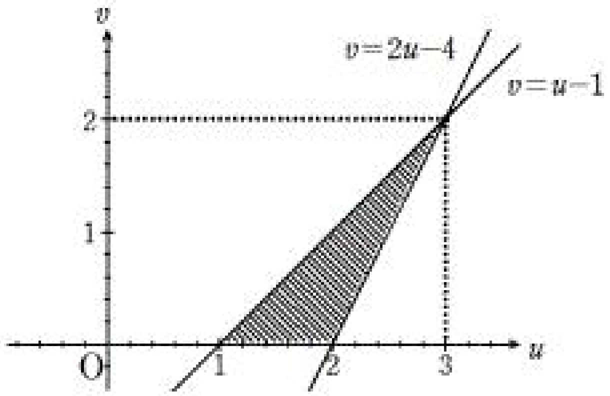
(2)



$$\begin{cases} f(0)=v\geqq 0 \\ f(1)=1-u+v\leqq 0 \\ f(2)=4-2u+v\geqq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} u\geqq 0 \\ v\leqq u-1 \\ v\geqq 2u-4 \end{cases}$$

uv 平面に図示すると，右図の斜線部分

（ただし，境界を含む）．

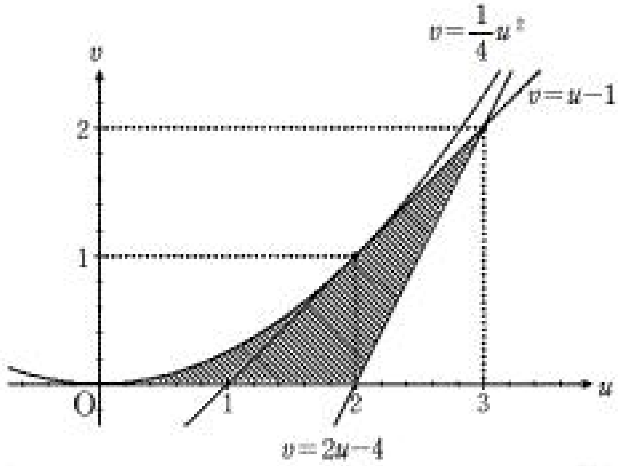


(3) $0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 2$　より，

$\begin{cases} u=x+y \\ v=xy \end{cases}$ の点 (u,v) をみたす条件は，

条件(A)　または　条件(B)となる．

点 (u,v) を uv 平面上に図示すると，右図のとおり．

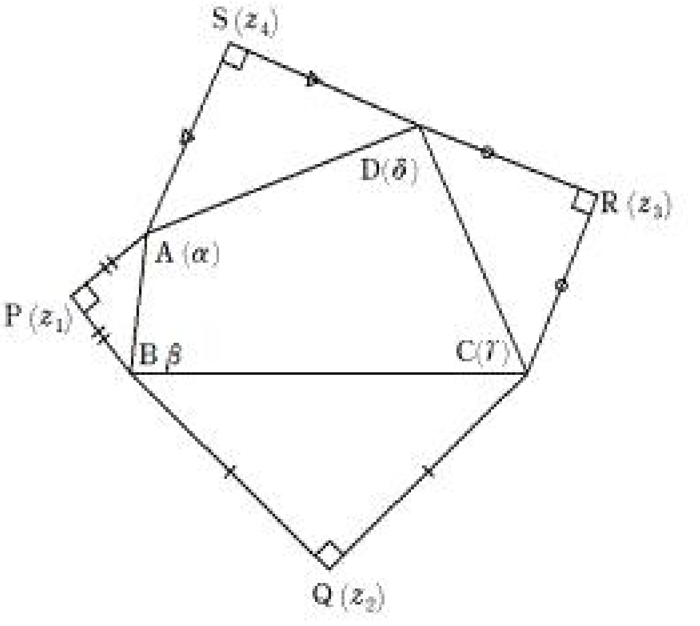


求める面積 T は，

$$T=\int_0^2 \frac{1}{4}u^2\,du+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1$$
$$=\frac{1}{12}\left[u^3\right]_0^2+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{8}{12}+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{7}{6}$$　（答）

［2］　$P(z_1), Q(z_2), R(z_3), S(z_4)$ とする．

(1)



$$z_1-\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)(\alpha-\beta)$$

$$\iff z_1=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)(\alpha-\beta)+\beta$$

$$=\frac{1}{2}\{(1+i)\alpha+(1-i)\beta\}$$ （答）

(2)　(1)と同様にして，

$$z_2=\frac{1}{2}\{(1+i)\beta+(1-i)\gamma\}$$

$$z_3=\frac{1}{2}\{(1+i)\gamma+(1-i)\delta\}$$

$$z_4=\frac{1}{2}\{(1+i)\delta+(1-i)\alpha\}$$

「四角形 PQRS が平行四辺形」

$\iff$「$z_2-z_1=z_3-z_4$」……①

①より，

$$\frac{1}{2}\{(1+i)\beta+(1-i)\gamma\}-\frac{1}{2}\{(1+i)\alpha+(1-i)\beta\}$$

$$=\frac{1}{2}\{(1+i)\gamma+(1-i)\delta\}-\frac{1}{2}\{(1+i)\delta+(1-i)\alpha\}$$

$$\iff -(1+i)\alpha+2i\beta+(1-i)\gamma=-(1-i)\alpha+(1+i)\gamma-2i\delta$$

$$\iff \beta+\delta=\alpha+\gamma$$

$$\iff \beta-\alpha=\gamma-\delta$$

つまり，

四角形 ABCD が平行四辺形であること　　（答）

(3)　(2)より，$\beta-\alpha=\gamma-\delta$ ……②

ここで，

$$z_4-z_1=\frac{1}{2}\{(1+i)\delta+(1-i)\alpha\}-\frac{1}{2}\{(1+i)\alpha+(1-i)\beta\}$$

$$=\frac{1}{2}\{-2i\alpha-(1-i)\beta+(1+i)\delta\}$$

（②より）

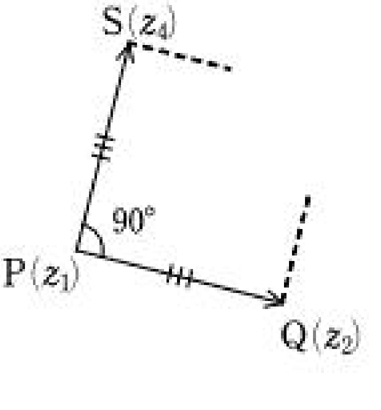
$$=\frac{1}{2}\{-2i\alpha-(1-i)\beta+(1+i)(\alpha-\beta+\gamma)\}$$

$$=\frac{1}{2}\{(1-i)\alpha-2\beta+(1+i)\gamma\}$$

$$=i(z_2-z_1)$$

よって，

四角形 PQRS は正方形　（証明終）



[３]

(1)　$f(t)=e^t-(1+t)$ とおく．

$$f'(t)=e^t-1$$

t	$(-\infty)$	$\cdots\cdots$	0	$\cdots\cdots$	$(+\infty)$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	(最小)	$\nearrow$	

よって，

$$f(t)\geqq f(0)=0$$

$\therefore$ $1+t\leqq e^t$ は示された（証明終）

(2)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$$

$$=[\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}}+\left[-\frac{1}{\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=2-\sqrt{2}\qquad\text{（答）}$$

(3)　(1) の結果を用いて，

$$1-\sin x\leqq e^{-\sin x}\quad\cdots\cdots①$$

さらに，　$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}$ において，

$$\underbrace{1+\sin x}_{(+)}\leqq e^{\sin x}$$

$$\iff\quad\frac{1}{1+\sin x}\geqq\frac{1}{e^{\sin x}}$$

$$\iff\quad e^{-\sin x}\leqq\frac{1}{1+\sin x}\quad\cdots\cdots②$$

以上①，②より，$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}$ において，

$$1-\sin x\leqq e^{-\sin x}\leqq\frac{1}{1+\sin x}$$

$$\therefore\quad\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\sin x)dx\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\sin x}dx\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin x}dx$$

$$\iff\quad\frac{\pi}{4}-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\sin x}dx\leqq2-\sqrt{2}\qquad\text{（証明終）}$$

[4]

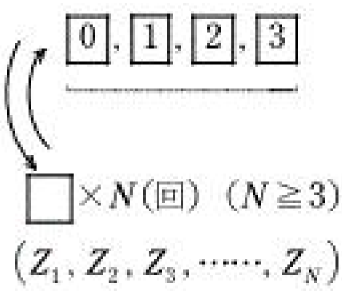
(1)

$(\alpha^{\circ}=1)$

$\alpha=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$

$\alpha^2=\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi$

$\alpha^3=1$



ここで，$X_1=\alpha^{Z_1}=\alpha$　つまり，$Z_1=1$ のとき，

$\therefore$ $P_1=\frac{1}{4}$　(答)

(2)　$\alpha^{Z_{n+1}}=1$ より，

$Z_{n+1}=0, 3$

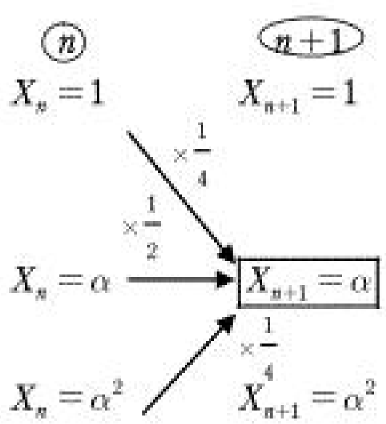
$\therefore$ $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$　(答)

(3)　$n=1, 2, 3, \cdots\cdots, N$ に対して，　$X_n=1$ or α or α^2 のいずれか．

ここで，　$P(X_n=\alpha)=P_n,\ P(X_n=\alpha^2)=Q_n$ より，

$P(X_n=1)=1-P_n-Q_n$　(答)

(4)



(推移図)

よって，

$$P_{n+1}=\frac{1}{4}(1-P_n-Q_n)+\frac{1}{2}P_n+\frac{1}{4}Q_n$$

$$=\frac{1}{4}P_n+\frac{1}{4}$$

$\therefore$ $P_{n+1}=\frac{1}{4}P_n+\frac{1}{4}$ ……①　$(n=1, 2, 3, \cdots\cdots N-1)$　(答)

(5)　①より，

$$P_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}\left(P_n-\frac{1}{3}\right)$$

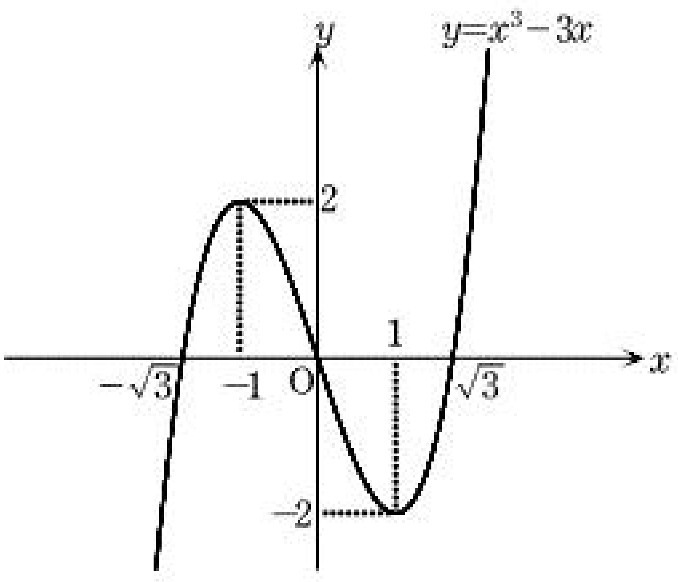
数列 $\left\{P_{n+1}-\frac{1}{3}\right\}$ は，初項 $P_1-\frac{1}{3}=-\frac{1}{12}$，公比 $\frac{1}{4}$ の等比数列

$\therefore$ $P_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$\therefore$ $P_n=\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$　$(n=1, 2, 3, \cdots\cdots, N)$　(答)

[5]

(1) $y=x^3-3x$ (奇関数) ← (原点対称)



$$y'=3x^2-3$$
$$=3(x+1)(x-1)$$

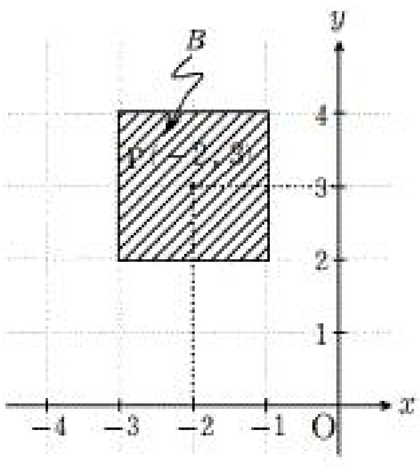
x	$(-\infty)$	……	-1	……	1	……	$(+\infty)$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗	2	↘	-2	↗	

曲線 $C: y=x^3-3x$ の概形は右図の通り.

次に $\mathrm{P}(-2,3)$ のとき, $\begin{cases} a=-2 \\ b=3 \end{cases}$ より,

$$B:\begin{cases} |x+2|\leqq 1 \\ |y-3|\leqq 1 \end{cases} \iff B:\begin{cases} -3\leqq x\leqq -1 \\ 2\leqq y\leqq 4 \end{cases}$$

領域 B は右図の斜線部分(ただし, 境界を含む).



(2) $\mathrm{P}(a,b)$ に対し, 点 $(a+1,b-1)$ が

曲線 C 上 $(a+1<-1 \iff a<-2)$

$\begin{cases} x=a+1 \\ y=b-1 \end{cases}$ (x,y) を $y=x^3-3x$ へ代入

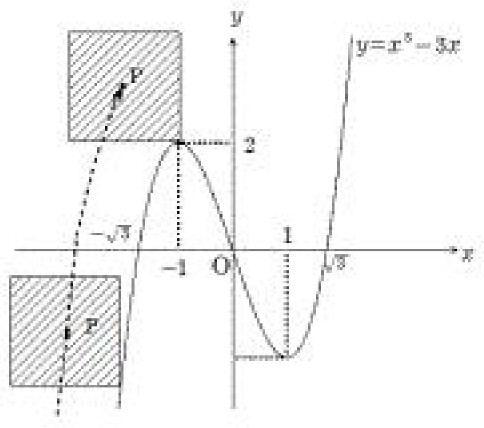
$$b-1=(a+1)^3-3(a+1)\ (a<-2)$$
$$\iff b=a^3+3a^2-1\ (a<-2)$$

点 P の軌跡は, $\underline{y=x^3+3x^2-1\ (x<-2)}$ (答)

(3)(i) $\mathrm{P}(a,b)$ に対し, 接点 $(a+1,b-1)$ のとき

(右図のケース)

(2)より, $\underline{\underline{y=x^3+3x^2-1\ (x\leqq -2)}}$

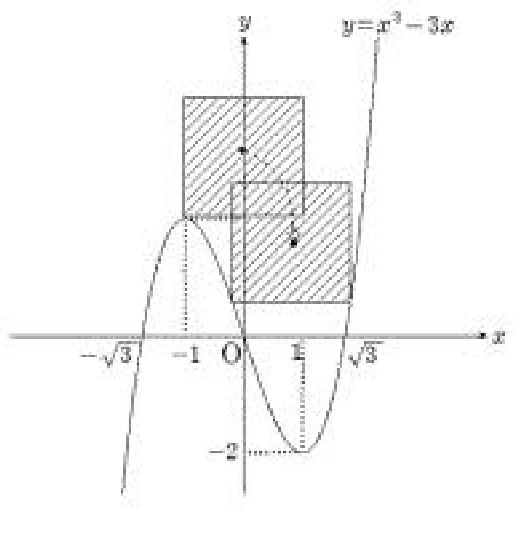


(ii) $\mathrm{P}(a,b)$ に対し, $\begin{cases} -1\leqq a+1 \\ a-1\leqq -1 \end{cases} \iff (-2\leqq a\leqq 0)$

$\therefore\ \underline{\underline{y=3\ (-2\leqq x\leqq 0)}}$

(iii) $\mathrm{P}(a,b)$ に対し, 接点 $(a-1,b-1)$ のとき

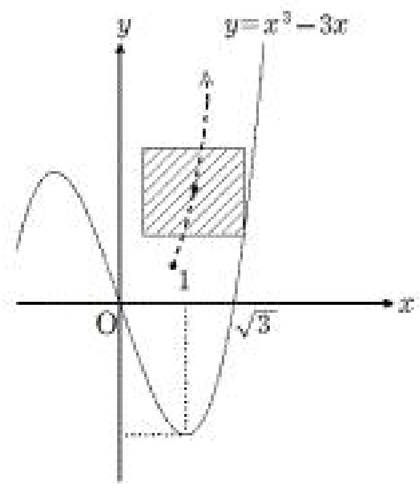
(右図のケース)



$\begin{cases} x=a-1 \\ y=b-1 \end{cases}$ (x,y) を $y=x^3-3x$ へ代入

$$b-1=(a-1)^3-3(a-1)\ \left(0\leqq a\leqq \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$
$$\iff b=a^3-3a^2+3\ \left(0\leqq a\leqq \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$
$$\therefore\ \underline{\underline{y=x^3-3x^2+3\ \left(0\leqq x\leqq \frac{\sqrt{6}}{3}\right)}}$$

(iv) $\mathrm{P}(a,b)$ に対し, 接点 $(a+1,b-1)$ のとき



(i)と同じ. $\underline{\underline{y=x^3+3x^2-1\ \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\leqq x\right)}}$

(注 (i)とは x の変域に相違あり)

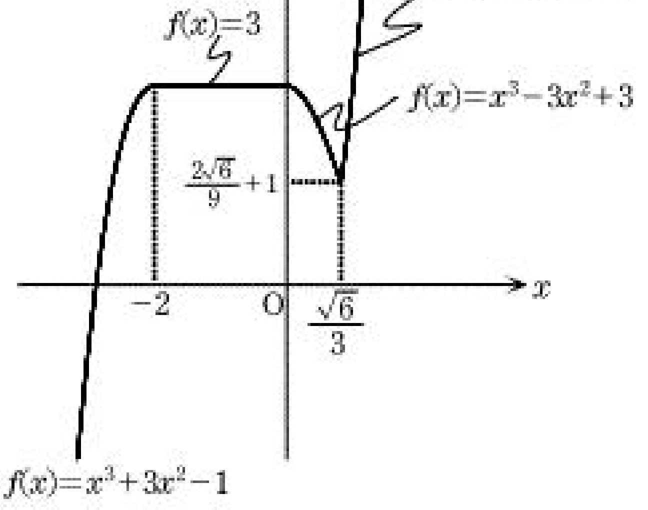
以上まとめて, $y=f(x)$ とすると, 下の通り ((4)で $y=f(x)$ は与えられる).

$$f(x)=\begin{cases} x^3+3x^2-1 & \left(x\leqq -2,\ \frac{\sqrt{6}}{3}\leqq x\right) \\ 3 & (-2\leqq x\leqq 0) \\ x^3-3x^2+3 & \left(0\leqq x\leqq \frac{\sqrt{6}}{3}\right) \end{cases} \quad \text{(答)}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2+6x=3x(x+2) & \left(x<-2,\ \frac{\sqrt{6}}{3}<x\right) \\ 0 & (-2<x<0) \\ 3x^2-6x=3x(x-2) & \left(0<x<\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \end{cases}$$

x	$(-\infty)$	……	-2	……	0	……	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	……	$(+\infty)$
$f'(x)$		$+$		0		$-$		$+$	
$f(x)$	$(-\infty)$	↗	3	→	3	↘	$\frac{2\sqrt{6}}{9}+1$	↗	$(+\infty)$

$y=f(x)$ を図示すると右図のとおり.



(4)

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to -0} f'(x)=0 \\ \displaystyle\lim_{x\to +0} f'(x)=\lim_{h\to +0}\frac{f(h+0)-f(0)}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{h^3-3h^2+3-3}{h}=\lim_{h\to +0}(h^2-3h)=0 \end{cases}$$

$$\therefore\ \lim_{x\to -0} f'(x)=\lim_{x\to +0} f'(x)$$

よって, $\underline{y=f(x)\text{ は }x=0\text{ で微分可能.}}$ (証明終)