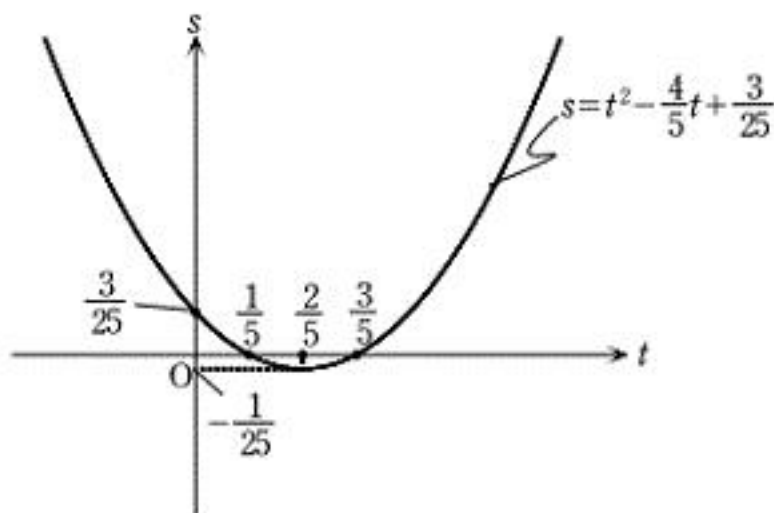


[1]

(1)

$$\begin{aligned}
 s &= \left(t - \frac{1}{5}\right)\left(t - \frac{3}{5}\right) \\
 &= t^2 - \frac{4}{5}t + \frac{3}{25} \\
 &= \left(t - \frac{2}{5}\right)^2 - \frac{1}{25}
 \end{aligned}$$

グラフを描くと右図の通り.



(2)

$$\begin{aligned}
 t^2 - ut + v &= (t-x)(t-y) \\
 &= t^2 - (x+y)t + xy
 \end{aligned}$$

より,
$$\begin{cases} x+y=u \\ xy=v \end{cases}$$

ここで, $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ より,
$$\begin{cases} 0 \leq u \leq 2 \\ 0 \leq v \leq 1 \end{cases} \dots\dots ①$$

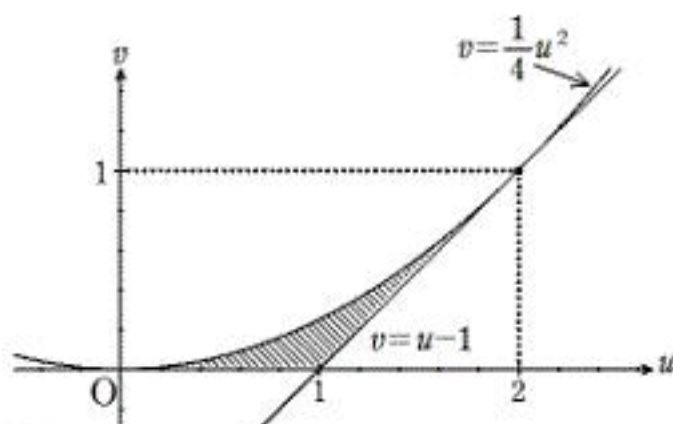
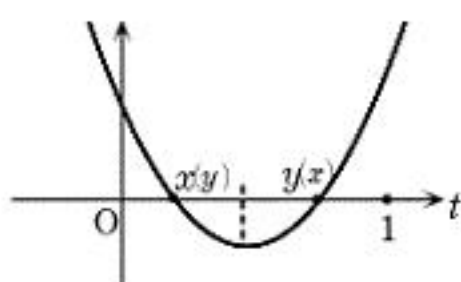
次に, $f(t) = t^2 - ut + v$ のグラフは右図の通り.

$$\begin{cases} D = u^2 - 4v \geq 0 \\ 0 \leq \frac{u}{2} \leq 1 \\ v \geq 0 \\ 1 - u + v \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} v \leq \frac{1}{4}u^2 \\ 0 \leq u \leq 2 \dots\dots ② \\ v \geq 0 \\ v \geq u-1 \end{cases}$$

(①をみたす)

②を uv 平面上に図示すると, 右図の斜線部分.

(ただし, 境界を含む)



(3)

$0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2$ より,
$$\begin{cases} 1 \leq u \leq 3 \\ 0 \leq v \leq 2 \end{cases} \dots\dots ③$$

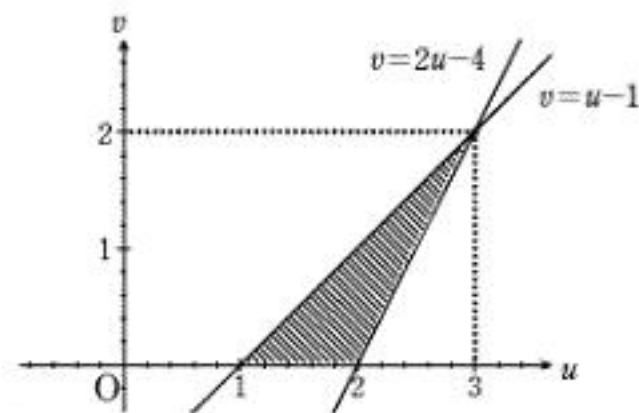
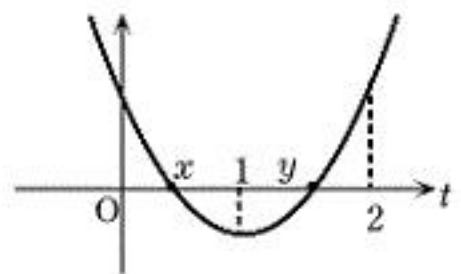
次に, $f(t) = t^2 - ut + v$ のグラフは右図の通り.

$$\begin{cases} f(0) = v \geq 0 \\ f(1) = 1 - u + v \leq 0 \\ f(2) = 4 - 2u + v \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} u \geq 0 \\ v \leq u-1 \dots\dots ④ \\ v \geq 2u-4 \end{cases}$$

(③をみたす)

④を uv 平面上に図示すると

右図の斜線部分, (ただし, 境界を含む)



(4) $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ より,

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = xy \end{cases}$$
 の点 (u, v) をみたす条件は,

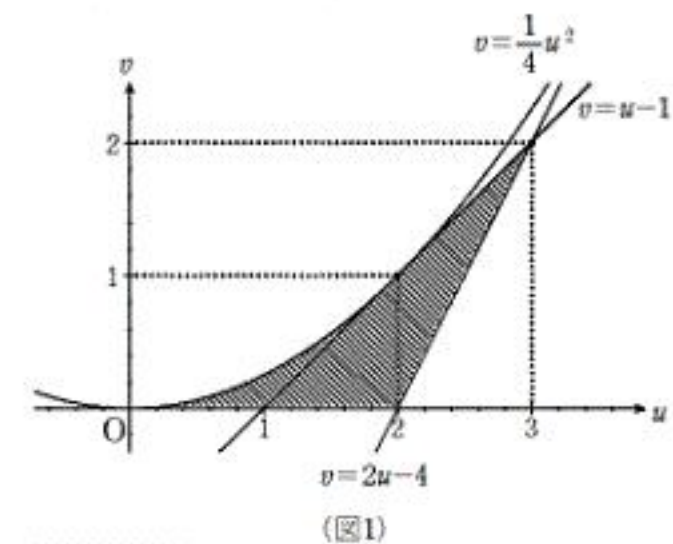
条件(A) または 条件(B)となる.

点 (u, v) を図示すると, (図1) の斜線の部分.

(ただし, 境界を含む)

求める面積 T とすると,

$$\begin{aligned}
 T &= \int_0^2 \frac{1}{4} u^2 du + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \\
 &= \frac{1}{12} \cdot 2^3 + \frac{1}{2} \\
 &= \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \\
 &= \frac{7}{6} \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$



(図1)

[2]

(1) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ において, $\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \geq 0$ より,

$$\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} < 1 \iff \left(\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}\right)^2 < 1^2$$

ここで, $1^2 - \left(\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}\right)^2 = 1 - \frac{1-\cos\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2} > 0$ より,

$$\underline{\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} < 1 \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right) \text{ は示された. (証明終)}}$$

(2) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の実数 θ に対して,

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} &= \sqrt{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \sin \frac{\theta}{2} \quad \left(\because 0 \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) \quad \left(\underline{\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{2}}\right) \end{aligned}$$

ここで, $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ に対して, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$ のとき, $\cos \alpha = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)$ と表せる.

$$\left(\cos \alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}\right)$$

よって, $\underline{f(\theta) = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}}$ (答) に対して,

$\alpha = f(\theta)$ と表せる.

(3) $\theta_{n+1} = f(\theta_n) \quad \left(\theta_1 = \frac{\pi}{2}\right)$ より,

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} &= -\frac{1}{2}\theta_n + \frac{\pi}{2} \\ \iff \theta_{n+1} - \frac{\pi}{3} &= -\frac{1}{2}\left(\theta_n - \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

数列 $\left\{\theta_n - \frac{\pi}{3}\right\}$ は初項 $\theta_1 - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$, 公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列

よって,

$$\begin{aligned} \theta_n - \frac{\pi}{3} &= \frac{\pi}{6} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ \therefore \theta_n &= \frac{\pi}{3} \left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad \text{(答)} \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} - \theta_n &= \frac{\pi}{3} \left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} \\ &= \frac{\pi}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

$$\therefore |\theta_{n+1} - \theta_n| = \frac{\pi}{2^{n+1}} \leq \frac{\pi}{1000}$$

$$(\text{与式}) \iff 1000 \leq 2^{n+1}$$

(右辺)は n における単調増加

$$(n=8) \quad 1000 > 2^9 = 512$$

$$(n=9) \quad 1000 \leq 2^{10} = 1024$$

より
最小の自然数 n は 9 (答)

$$(1) \quad y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x + \frac{13}{6} \text{ より,}$$

$$y' = -x^2 + \frac{1}{2}$$

点 $D(-1, 2)$ における接線 l の方程式は,

$$l: y = -\frac{1}{2}(x+1) + 2$$

$$\iff \underline{y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}} \quad (\text{答})$$

(2)

$$-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x + \frac{13}{6} = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$\iff x^3 - 3x - 2 = 0$$

$$\iff (x+1)^2(x-2) = 0 \quad \therefore x = -1, 2 \quad \therefore \underline{E\left(2, \frac{1}{2}\right)} \quad (\text{答})$$

(3) $A(a, b)$ (ただし, $a^2 + b^2 = 1, a > 0, b > 0$ ……①)

$P\left(s, -\frac{1}{2}s + \frac{3}{2}\right)$ (s : 実数) に対して,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} &= as + b\left(-\frac{1}{2}s + \frac{3}{2}\right) \\ &= \underline{\underline{\left(a - \frac{b}{2}\right)s + \frac{3}{2}b}} \leftarrow (\text{一定}) \end{aligned}$$

$a - \frac{b}{2} = 0$ ($b = 2a$) が必要であり, ①より $(a, b) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ となる.

逆にこのとき, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = \frac{3}{\sqrt{5}}$ (一定) となり十分

$$\therefore \underline{A\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)} \quad (\text{答})$$

(4) $Q\left(t, -\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t + \frac{13}{6}\right)$ (t : 実数) と表せて,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ} &= \frac{1}{\sqrt{5}}t + \frac{2}{\sqrt{5}}\left(-\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t + \frac{13}{6}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\underbrace{-\frac{2}{3}t^3 + 2t + \frac{13}{3}}_{f(t)}\right) \end{aligned}$$

ここで, $f(t) = -\frac{2}{3}t^3 + 2t + \frac{13}{3}$ ($-1 \leq t \leq 2$) とすると,

$$\begin{aligned} f'(t) &= -2t^2 + 2 \\ &= -2(t+1)(t-1) \end{aligned}$$

t	-1	……	1	……	2
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		↗	(最大)	↘	

$f(t)$ は $t=1$ にて最大となるので,

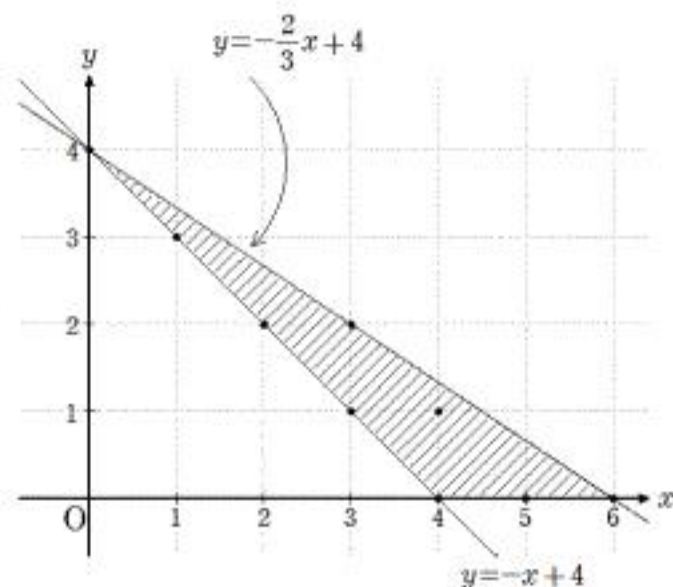
$$(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ})_{\text{Max}} = \frac{1}{\sqrt{5}}f(1) = \underline{\underline{\frac{17}{3\sqrt{5}}}} \quad (\text{答})$$

[4]

(1)

$$\text{領域 } D: \begin{cases} y \geq 0 \\ x + y \geq 4 \\ 2x + 3y \leq 12 \end{cases}$$

を図示すると、右図の斜線部分(ただし、境界を含む)。



(2) 格子点は次の9点 ((1)の図中に書き込み済み)

$$\underline{(4, 0), (5, 0), (6, 0), (3, 1), (4, 1), (2, 2), (3, 2), (1, 3), (0, 4)} \quad (\text{答})$$

(3) $(X, Y) = (3, 1), (4, 1), (2, 2), (3, 2), (1, 3)$ の5通りのみ。

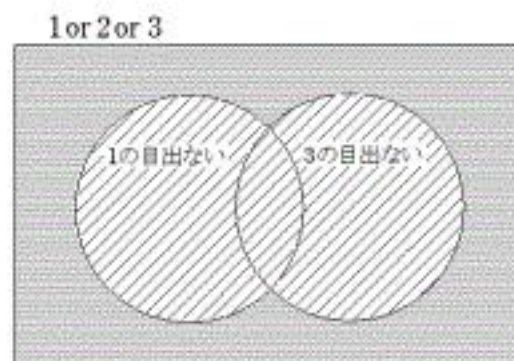
$$\frac{5}{6 \cdot 6} = \frac{5}{36} \quad (\text{答})$$

(4)

$$\left(\underset{\text{(最小)}}{Z}, \underset{\text{(最大)}}{W} \right) = (2, 2), (1, 3) \text{ となる.}$$

(i) $(Z, W) = (2, 2)$ のとき n 回全ての目が“2”だから $\left(\frac{1}{6}\right)^n$

(ii) $(Z, W) = (1, 3)$ のとき n 回全て1以上3以下(ただし、1と3は少なくとも1回は出る)



$$\frac{3^n - 2^n - 2^n + 1}{6^n} = \frac{3^n - 2 \cdot 2^n + 1}{6^n}$$

よって、(i), (ii)より、求める確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{3^n - 2 \cdot 2^n + 1}{6^n} = \frac{3^n - 2^{n+1} + 2}{6^n} \quad (\text{答})$$