〔1〕

(1) $a_n = ar^{n-1}$ $(a>0, r>0)$ より,

$$b_{n+1} = ar^n b_n \quad (n \geqq 1)$$

$$\begin{aligned}
\therefore\ b_n &= ar^{n-1} b_{n-1} \\
&= ar^{n-1} \cdot ar^{n-2} b_{n-2} \\
&= \cdots\cdots \\
&= ar^{n-1} \cdot ar^{n-2} \cdot ar^{n-3} \cdots\cdots ar^1 \underbrace{a_1}_{=a} \\
&= a^n r^{1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)} \\
&= a^n r^{\frac{n(n-1)}{2}} \quad (n \geqq 2)
\end{aligned}$$

$n=1$ のとき, $b_1 = a^1 = a$ より, $n=1$ もみたす.

$$\therefore\ b_n = a^n r^{\frac{n(n-1)}{2}} \quad (n \geqq 1) \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$c_n = \frac{\log_2 b_n}{n} = \frac{1}{n}\log_2 a^n r^{\frac{n(n-1)}{2}} = \log_2 ar^{\frac{n-1}{2}} = \log_2 a + \frac{n-1}{2}\log_2 r$$

ここで,

$$\begin{aligned}
c_{n+1} - c_n &= \left(\log_2 a + \frac{n}{2}\log_2 r\right) - \left(\log_2 a + \frac{n-1}{2}\log_2 r\right) \\
&= \frac{1}{2}\log_2 r \ \text{(一定の値)}
\end{aligned}$$

これより, 数列 $\{c_n\}$ は初項 $c_1 = \log_2 a$, 公差 $\frac{1}{2}\log_2 r$ の等差数列. (証明終)

(3)

$$\begin{aligned}
M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} c_k &= \frac{1}{n} \cdot \frac{n\left\{2\log_2 a + (n-1)\cdot\frac{1}{2}\log_2 r\right\}}{2} \\
&= \log_2 a + \frac{n-1}{4}\log_2 r \\
&= \log_2 ar^{\frac{n-1}{4}}
\end{aligned}$$

これより, $d_n = 2^{M_n} = 2^{\log_2 ar^{\frac{n-1}{4}}} = a\left(r^{\frac{1}{4}}\right)^{n-1}$

$$\therefore\ d_{n+1} = r^{\frac{1}{4}} d_n$$

これより, 数列 $\{d_n\}$ は初項 $d_1 = a$, 公差 $r^{\frac{1}{4}}$ の等比数列. (証明終)

〔2〕

(1) $P_4(a_1-a_3, a_2-a_4)=(0,0)$ より,

$$\begin{cases} a_1=a_3 \\ a_2=a_4 \end{cases} \cdots\cdots N\cdot N=N^2 \quad \text{通り}$$

$$\therefore \frac{N^2}{N^4}=\frac{1}{N^2} \quad \text{(答)}$$

(2) $P_4(a_1-a_3, a_2-a_4)$ が $x \geqq 0, y \leqq 0$ に含まれるなら,

$$\begin{cases} a_1 \geqq a_3 \\ a_2 \leqq a_4 \end{cases} \cdots\cdots (N+(N-1)+(N-2)+\cdots\cdots+2+1)^2=\left\{\frac{N+(N+1)}{2}\right\}^2=\frac{N^2}{4}(N+1)^2 \quad \text{通り}$$

$$\therefore \frac{\frac{N^2}{4}(N+1)^2}{N^4}=\frac{(N+1)^2}{4N^2} \quad \text{(答)}$$

(3) $P_4(a_1-a_3, a_2-a_4)$ が $y=x$ 上に存在するなら,

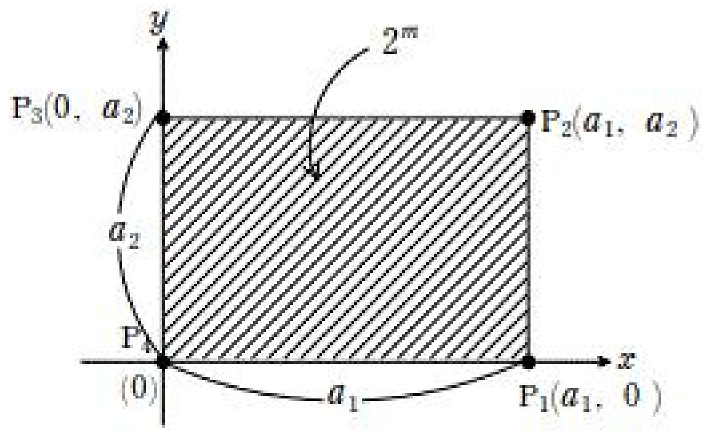
$$a_2-a_4=a_1-a_3$$

$$(\Longleftrightarrow a_1+a_4=a_2+a_3)$$

$$\cdots\cdots 1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+(N-1)^2+N^2+(N-1)^2+\cdots\cdots+2^2+1^2=2\sum_{k=1}^{N-1}k^2+N^2$$

$$=\frac{N}{3}(2N^2+1) \quad \text{通り}$$

$$\therefore \frac{\frac{N}{3}(2N^2+1)}{N^4}=\frac{2N^2+1}{3N^3} \quad \text{(答)}$$



(4) $P_4(a_1-a_3, a_2-a_4)=(0,0)$ より, $\begin{cases} a_1=a_3 \\ a_2=a_4 \end{cases}$

つまり,

$\underline{P_1(a_1, 0), P_2(a_1, a_2), P_3(0, a_2), P_3(0, 0)}$

さらに,

$a_1a_2=2^m$ $\cdots\cdots$ $m+1$ 通りあり各々の (a_1, a_2)

$(N=2^m)$ 　　に対し, (a_3, a_4) は一意的に決まる.

$$\therefore \frac{m+1}{N^4}=\frac{m+1}{2^{4m}} \quad \text{(答)}$$

〔3〕

$f(x)=(1-x)\cos x+x\sin x-e^x\int_0^x e^{-t}f(t)dt$ ……①

(1) ①において，$x=0$ を代入

$f(0)=1$ (答)

①の辺々を x で微分すると，

$$f'(x)=-\cos x-(1-x)\sin x+\sin x+x\cos x-e^x\int_0^x e^{-t}f(t)dt-e^x\cdot e^{-x}f(x)$$
$$=(x-1)\cos x+x\sin x\underbrace{-f(x)-e^x\int_0^x e^{-t}f(t)dt}_{}$$

(①より)

$$=(x-1)\cos x+x\sin x+(x-1)\cos x-x\sin x$$
$$=2(x-1)\cos x \qquad \therefore\ f'(x)=2(x-1)\cos x$$ (答)

(2) (1)の結果より，

$$f(x)=\int 2(x-1)\cos x dx$$
$$=\int 2(x-1)(\sin x)'dx$$
$$=2(x-1)\sin x-\int 2\sin x dx$$
$$=2(x-1)\sin x+2\cos x+C$$ (Cは積分定数)

ここで，

$f(0)=2+C=1 \qquad \therefore\ C=-1$

$\therefore\ f(x)=2(x-1)\sin x+2\cos x-1$ (答)

(3) 関数 $f(x)=2(x-1)\sin x+2\cos x-1$ $(0<x<\pi)$ の増減表を調べる．

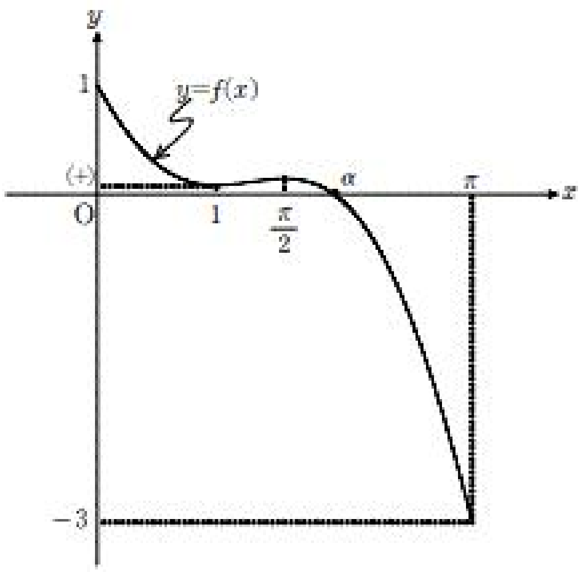
$f'(x)=2(x-1)\cos x$

x	(0)	……	1	……	$\frac{\pi}{2}$	……	(π)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	(1)	↘	(+)	↗		↘	(-3)

ここで，$f(1)=2\cos x-1>2\cos\frac{\pi}{3}-1=0$

グラフより，方程式 $f(x)=0$ は $0<x<\pi$ に

ただ1つの実数解 $(x=\alpha)$ をもつ．(証明終)



(4)

$$S_1-S_2=\int_0^\alpha f(x)dx-\int_\alpha^\pi\{-f(x)\}dx$$
$$=\int_0^\pi f(x)dx$$
$$=\int_0^\pi\{2(x-1)\sin x+2\cos x-1\}dx$$
$$=2\int_0^\pi(x-1)(-\cos x)'dx+[2\sin x-x]_0^\pi$$
$$=2[(1-x)\cos x]_0^\pi+2\int_0^\pi\cos x dx-\pi$$
$$=-2(1-\pi)-2-\pi$$
$$=\pi-4<0 \qquad \therefore\ S_1<S_2$$ (答)

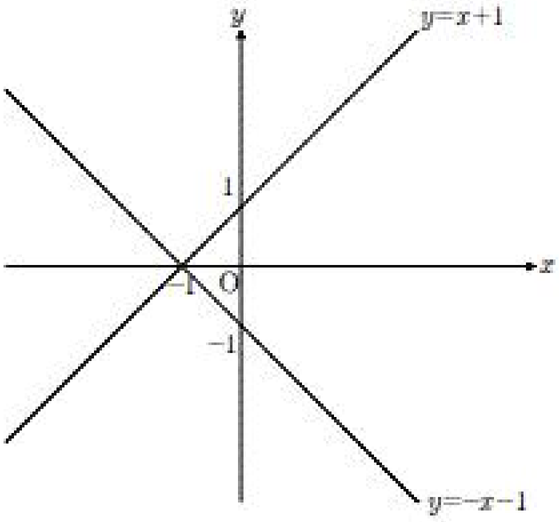
〔4〕

(1)　実数 x, y を用いて，$z=x+yi$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
w&=z^2+2z+1-2i\\
&=(z+1)^2-2i\\
&=(x+1+yi)^2-2i\\
&=\underbrace{(x+1)^2-y^2}_{0}+2\{(x+1)y-1\}i
\end{aligned}
$$

$\therefore\ y=\pm(x+1)$

(右図の 2 直線)



(2)　(1)より，

$$w=0 \iff \begin{cases} y^2=(x+1)^2 \\ (x+1)y=1 \end{cases}$$

$x+1\neq 0,\ y\neq 0$ より，　$x+1=\dfrac{1}{y}$

これより，

$$y^2=(x+1)^2=\frac{1}{y^2} \iff y^4=1 \qquad \therefore\ y=\pm 1$$

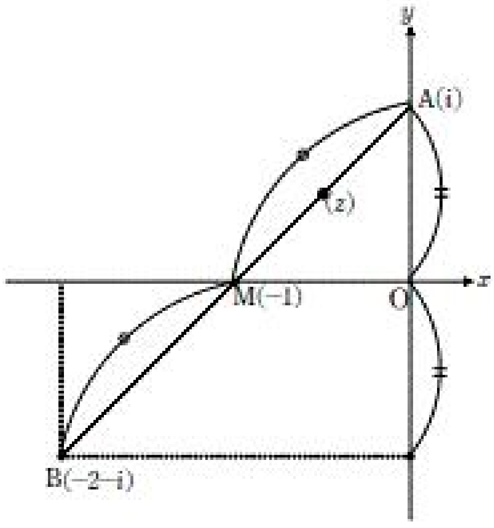
これより，

$$(x,y)=(0,1),(-2,-1) \qquad \therefore\ z=\underset{(\alpha)}{i},\ \underset{(\beta)}{-2-i} \qquad \text{(答)}$$

(3)　$0\leqq t\leqq 1$ の実数 t を用いて，

$$z=(1-t)\cdot(-1)+t\cdot i=t-1+ti$$

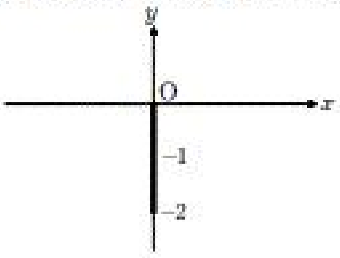
$$\left(\overrightarrow{OX}=(1-t)\overrightarrow{OM}+t\overrightarrow{OA}\right)$$



このとき，

$$
\begin{aligned}
w&=(t+ti)^2-2i\\
&=t^2-t^2+2t^2i-2i\\
&=2(t^2-1)i \leftarrow \left(-2\leqq 2(t^2-1)\leqq 0\right)
\end{aligned}
$$

複素数 w の描く図形は下記の線分となる．



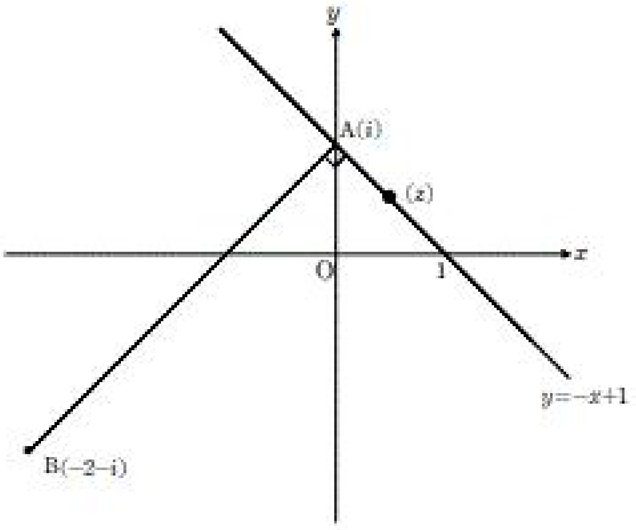
(4)　$z=u+(1-u)i$（u は実数）と表せる．

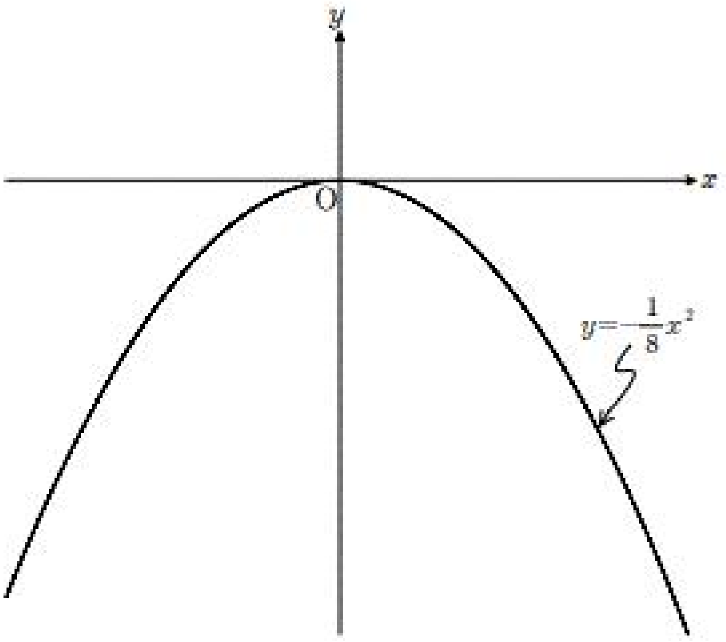
$$
\begin{aligned}
w&=\{u+1+(1-u)i\}^2-2i\\
&=(u+1)^2-(1-u)^2-2(u^2-1)i-2i\\
&=4u-2u^2i
\end{aligned}
$$

ここで，$\begin{cases} \mathrm{Re}(w)=4u=x \\ \mathrm{Im}(w)=-2u^2=y \end{cases}$ とおけば，

$$y=-2\cdot\left(\frac{x}{4}\right)^2 \iff y=-\frac{1}{8}x^2 \ (x\text{ は実数全体})$$

複素数 w の描く図形は下記の放物線 $y=-\dfrac{1}{8}x^2$ となる．





〔5〕

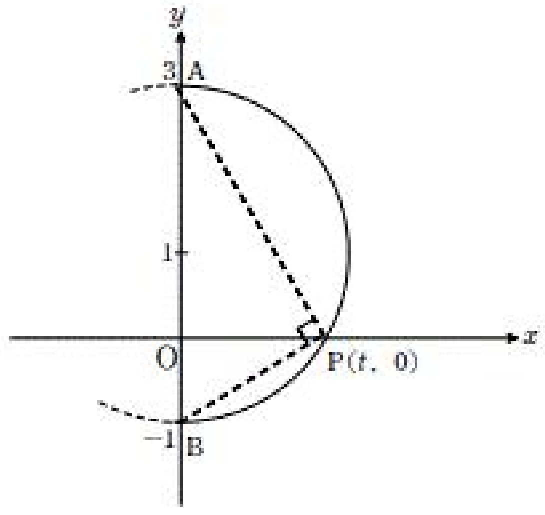
(1)　中心(0, 1)，半径 2 の円の方程式($x>0$)は，

$$x^2+(y-1)^2=4\ \ (x>0)\ \cdots\cdots①$$

①で $y=0$ とおくと，

$$x^2=3\qquad \therefore\ x=\sqrt{3}\ \ (>0)$$

$$\therefore\ t=\sqrt{3}\qquad (答)$$

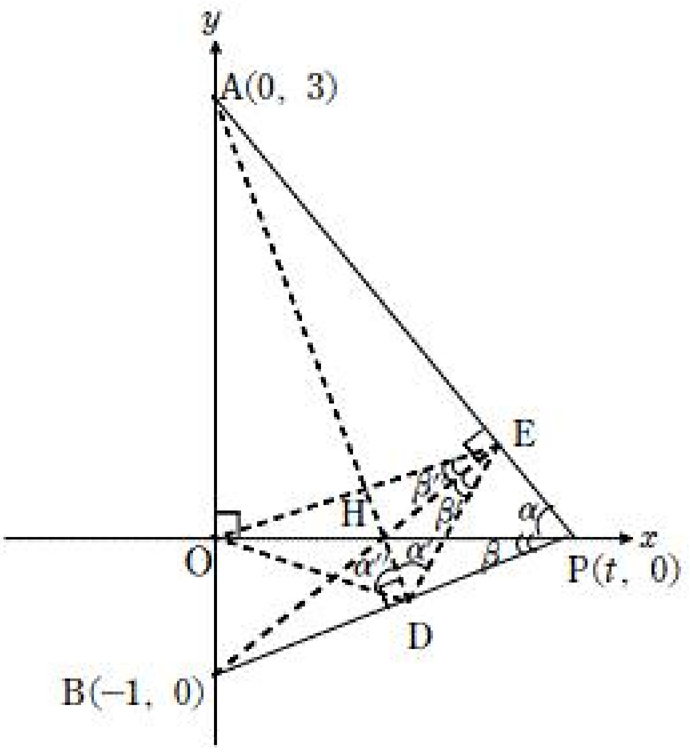


(2)

直線 AD の方程式：$y=-tx+3$

直線 BE の方程式：$y=\dfrac{t}{3}t-1$　　$(t>0)$

2 直線の交点 H の座標は $\mathrm{H}\left(\dfrac{3}{t},\ 0\right)$ $(t>0)$ (答)



(3) 右図の通り角 $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta''$ を定める．

四角形 PDHE は円に内接する四角形より，

($\angle\mathrm{PDH}=\angle\mathrm{PEH}=90°$)

$$\begin{cases}\underset{(\alpha)}{\angle\mathrm{HPE}}=\underset{(\alpha')}{\angle\mathrm{HDE}}\\ \underset{(\beta)}{\angle\mathrm{HPD}}=\underset{(\beta')}{\angle\mathrm{HED}}\end{cases}\cdots\cdots②$$

さらに，四角形 OBPE は円に内接する四角形より，

($\angle\mathrm{BOP}=\angle\mathrm{BEP}=90°$)

$$\begin{cases}\underset{(\alpha)}{\angle\mathrm{OPE}}=\underset{(\alpha'')}{\angle\mathrm{ODH}}\\ \underset{(\beta)}{\angle\mathrm{OPB}}=\underset{(\beta'')}{\angle\mathrm{OEB}}\end{cases}\cdots\cdots③$$

②，③より，$\alpha=\alpha'=\alpha''$，$\beta=\beta'=\beta''$ となり，点 H は三角形 ODE の内心であることが示された．(証明終)

(4)　2 本の直線方程式 $y=-\dfrac{3}{t}x+3$ と $y=\dfrac{t}{3}x-1$ を連立して交点 E を求めると，

$$\mathrm{E}\left(\frac{12t}{t^2+9},\ \frac{3(t^2-3)}{t^2+9}\right)$$

これにより，直線 OE の方程式は，

$$y=\frac{t^2-3}{4t}x\ \ (\Longleftrightarrow\ (t^2-3)x-4ty=0)$$

$$\therefore\ f(t)=\frac{\left|(t^2-3)\cdot\dfrac{3}{t}-4t\cdot 0\right|}{\sqrt{(t^2-3)^2+16t^2}}=\frac{3(t^2-3)}{t\sqrt{t^4+10t^2+9}}\ \ (t>\sqrt{3})\qquad (答)$$

(5)

$$\{f(t)\}^2=\frac{9(t^2-3)^2}{t^2(t^2+1)(t^2+9)}$$

($t^2=u$ とおく．$t>\sqrt{3}$ より，$u>3$)

$$=\frac{9(u-3)^2}{u(u+1)(u+9)}$$

$$=F(u)$$

関数 $F(u)=\dfrac{9(u-3)^2}{u^3+10u^2+9u}$ $(u>3)$が最大値をもつことを示す．

$$F'(u)=9\cdot\frac{2(u-3)(u^3+10u^2+9u)-(u-3)^2(3u^2+20u+9)}{(u^3+10u^2+9u)^2}$$

$$=\frac{9(u-3)(-u^3+9u^2+69u+27)}{\underbrace{u^2(u+1)^2(u+9)^2}_{(+)}}$$

ここで，　$G(u)=-u^3+9u^2+69u+27$ $(u>3)$ とおく．

「$G(u)$の符号変化」$\Longleftrightarrow$「$F(u)$の符号変化」

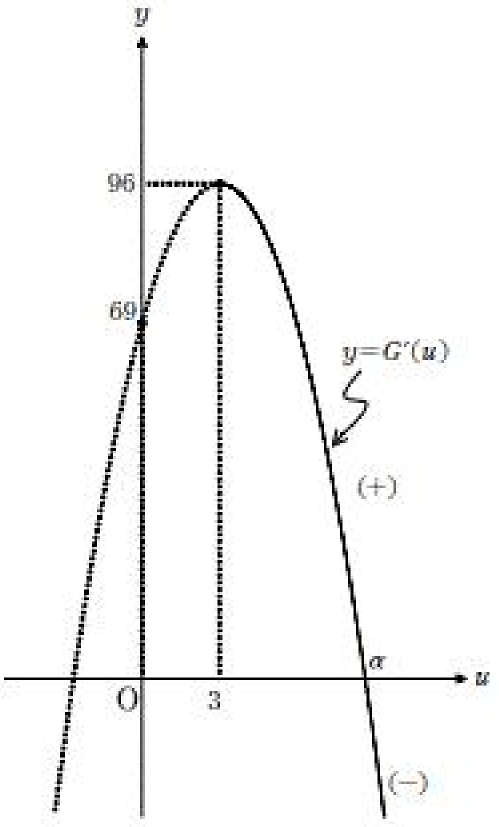
$$G'(u)=-3u^2+18u+69$$

$$=-3(u-3)^2+96\ \xrightarrow{\text{(右図の通り)}}$$

$u>3$ において，　$G'(u)=0$ をみたす実数 u はただ 1 つ存在．

それを $u=\alpha$ とおくと，　$F(u)$の増減表は下記の通り．

u	(3)	……	α	……	(∞)
$F'(u)$		+	0	−	
$F(u)$		↗	(最大)	↘	



$u=\alpha$ $(t=\sqrt{\alpha}>\sqrt{3})$ にて，$F(u)$は最大値をとる．

つまり，$f(t)$は最大値をとることが示された．　(証明終)