

[1]

(1)  $a_n = ar^{n-1}$  ( $a > 0, r > 0$ ) より,

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= ar^n b_n \quad (n \geq 1) \\ \therefore b_n &= ar^{n-1} b_{n-1} \\ &= ar^{n-1} \cdot ar^{n-2} b_{n-2} \\ &= \dots\dots\dots \\ &= ar^{n-1} \cdot ar^{n-2} \cdot ar^{n-3} \dots\dots\dots ar^1 \underbrace{a_1}_a \\ &= a^n r^{1+2+3+\dots+(n-1)} \\ &= a^n r^{\frac{n(n-1)}{2}} \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

$n=1$  のとき,  $b_1 = a^1 = a$  より,  $n=1$  もみたす.

$$\therefore b_n = a^n r^{\frac{n(n-1)}{2}} \quad (n \geq 1) \quad (\text{答})$$

(2)

$$c_n = \frac{\log_2 b_n}{n} = \frac{1}{n} \log_2 a^n r^{\frac{n(n-1)}{2}} = \log_2 ar^{\frac{n-1}{2}} = \log_2 a + \frac{n-1}{2} \log_2 r$$

ここで,

$$\begin{aligned} c_{n+1} - c_n &= \left( \log_2 a + \frac{n}{2} \log_2 r \right) - \left( \log_2 a + \frac{n-1}{2} \log_2 r \right) \\ &= \frac{1}{2} \log_2 r \quad (\text{一定の値}) \end{aligned}$$

これより, 数列  $\{c_n\}$  は初項  $c_1 = \log_2 a$ , 公差  $\frac{1}{2} \log_2 r$  の等差数列. (証明終)

(3)

$$\begin{aligned} M_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n c_k = \frac{1}{n} \cdot \frac{n \left\{ 2 \log_2 a + (n-1) \cdot \frac{1}{2} \log_2 r \right\}}{2} \\ &= \log_2 a + \frac{n-1}{4} \log_2 r \\ &= \log_2 ar^{\frac{n-1}{4}} \end{aligned}$$

これより,  $d_n = 2^{M_n} = 2^{\log_2 ar^{\frac{n-1}{4}}} = a \left( r^{\frac{1}{4}} \right)^{n-1}$

$$\therefore d_{n+1} = r^{\frac{1}{4}} d_n$$

これより, 数列  $\{d_n\}$  は初項  $d_1 = a$ , 公比  $r^{\frac{1}{4}}$  の等比数列. (証明終)

[2]

(1)  $n$  回後と  $n+1$  回後の推移図を描くと以下の通り.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \boxed{0} \text{ が上} \\ P_n \end{array} & \begin{array}{c} n \text{ 回後} \\ \xrightarrow{\times p} \\ \nearrow \times (1-p) \end{array} & \begin{array}{c} n+1 \text{ 回後} \\ P_{n+1} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \boxed{1} \text{ が上} \\ 1-P_n \end{array} & & \begin{array}{c} 1-P_{n+1} \end{array}
 \end{array}$$

これより,

$$\begin{aligned}
 P_{n+1} &= p \cdot P_n + (1-p) \cdot (1-P_n) \\
 \Leftrightarrow P_{n+1} &= (2p-1)P_n + 1-p \quad (2p-1 \neq 1) \\
 \Leftrightarrow P_{n+1} - \frac{1}{2} &= (2p-1) \left( P_n - \frac{1}{2} \right)
 \end{aligned}$$

数列  $\left\{ P_n - \frac{1}{2} \right\}$  は初項  $P_1 - \frac{1}{2} = p - \frac{1}{2}$ , 公比  $2p-1$  の等比数列より,

$$\begin{aligned}
 P_n - \frac{1}{2} &= \left( p - \frac{1}{2} \right) \cdot (2p-1)^{n-1} \\
 \therefore P_n &= \frac{1}{2}(2p-1)^n + \frac{1}{2} \quad (n \geq 1) \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

(2) 事象  $E$  = 「途中でカードが少なくとも 1 回裏返されている ( $n$  回試行後に  $\boxed{0}$  が上)」

事象  $F$  = 「途中でカードが 2 回裏返されている ( $n$  回試行後に  $\boxed{0}$  が上)」

とする.

$$\begin{aligned}
 P(E) &= P_n - p^n = \frac{1}{2}(2p-1)^n + \frac{1}{2} - p^n \\
 P(E \cap F) &= {}_n C_2 (1-p)^2 p^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2} (1-p)^2 p^{n-2}
 \end{aligned}$$

これより,

$$\begin{aligned}
 P_E(F) &= \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{2}n(n-1)(1-p)^2 p^{n-2}}{\frac{1}{2}(2p-1)^n + \frac{1}{2} - p^n} \\
 &= \frac{n(n-1)(1-p)^2 p^{n-2}}{(2p-1)^n - 2p^n + 1} \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

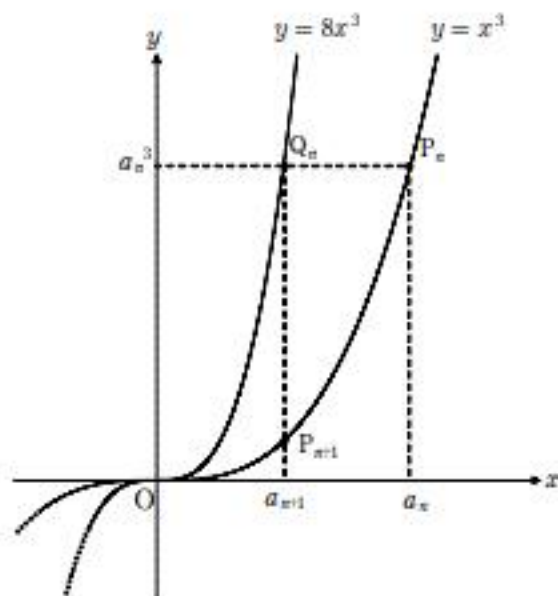
[3]

(1) 帰納的に  $a_n > 0$  と考えてよい. ( $a_1 = 1$ )

右図より,

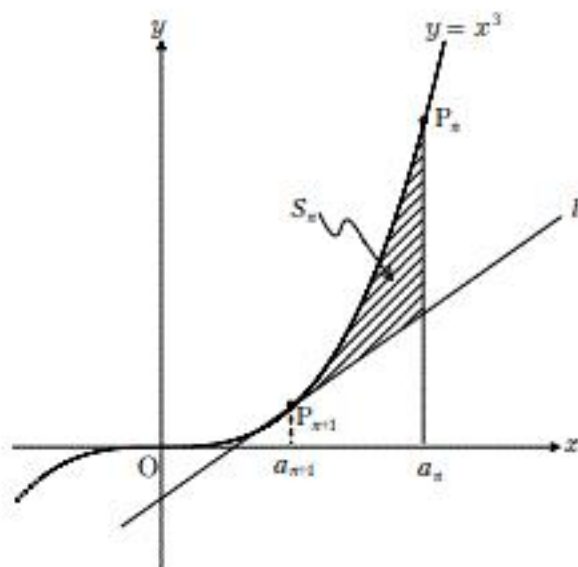
$$8a_{n+1}^3 = a_n^3 \iff a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$$

$$\therefore a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad (n \geq 1) \quad (\text{答})$$



(2)

$$\begin{aligned} S_n &= \int_{a_{n+1}}^{a_n} (x - a_{n+1})^2 (x + 2a_{n+1}) dx \\ &= \int_{a_{n+1}}^{2a_{n+1}} (x^3 - 3a_{n+1}^2 x + 2a_{n+1}^3) dx \\ &= \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}a_{n+1}^2 x^2 + 2a_{n+1}^3 x \right]_{a_{n+1}}^{2a_{n+1}} \\ &= \frac{5}{4}a_{n+1}^4 \\ &= \frac{5}{4} \left(\frac{1}{16}\right)^n \quad \left( a_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$



(3)

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^n \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{16} \left(\frac{1}{16}\right)^{k-1} \\ &= \frac{\frac{5}{64} \left[ 1 - \left(\frac{1}{16}\right)^n \right]}{1 - \frac{1}{16}} \\ &= \frac{1}{12} \left[ 1 - \left(\frac{1}{16}\right)^n \right] \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

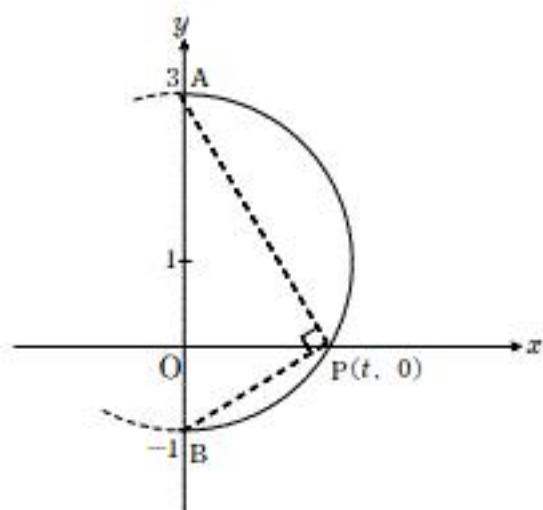
- (1) 中心(0, 1), 半径 2 の円の方程式( $x > 0$ )は,

$$x^2 + (y-1)^2 = 4 \quad (x > 0) \dots\dots\dots ①$$

①で  $y=0$  とおくと、

$$x^2 = 3 \quad \therefore x = \sqrt{3} \quad (>0)$$

$$\therefore t = \sqrt{3} \quad (\text{答})$$



(2)

直線 AD の方程式:  $y = -tx + 3$

直線 BE の方程式:  $y = \frac{t}{3}x - 1$  ( $t > 0$ )

2直線の交点 H の座標は  $H\left(\frac{3}{t}, 0\right)$  ( $t > 0$ ) (答)

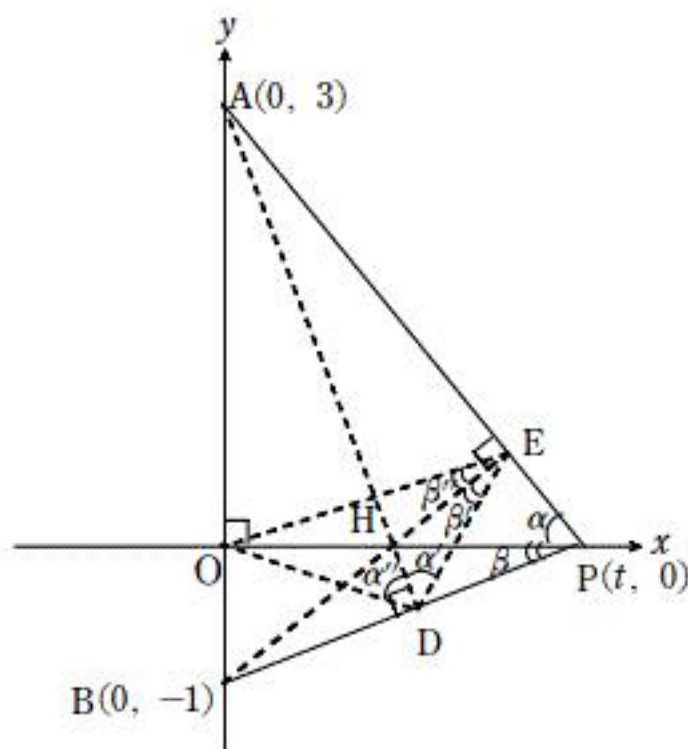
(3) 右図の通り角 $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta''$ を定める.

四角形 PDHE は円に内接する四角形より,  
( $\angle PDH = \angle PEH = 90^\circ$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} \angle HPE = \angle HDE \\ \qquad (\alpha) \qquad (\alpha') \\ \angle HPD = \angle HED \\ \qquad (\beta) \qquad (\beta') \end{array} \right. \dots\dots (2)$$

さらに、四角形 OBPE は円に内接する四角形より、  
 $(\angle BOP = \angle BEP = 90^\circ)$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \angle OPE = \angle ODH & \text{.....} \textcircled{3} \\ \angle OPB = \angle OEB & \end{array} \right.$$



②, ③より,  $\alpha = \alpha' = \alpha'', \beta = \beta' = \beta''$  となり, 点 H は三角形 ODE の内心であることが示された. (証明終)

(4) 2本の直線方程式  $y = -\frac{3}{t}x + 3$  と  $y = \frac{t}{3}x - 1$  を連立して交点Eを求めると、

$$E\left(\frac{12t}{t^2+9}, \frac{3(t^2-3)}{t^2+9}\right)$$

これにより、直線  $OE$  の方程式は、

$$y = \frac{t^2 - 3}{4t}x \quad (\Leftrightarrow (t^2 - 3)x - 4ty = 0)$$

$$\therefore f(t) = \frac{\left| (t^2 - 3) \cdot \frac{3}{t} - 4t \cdot 0 \right|}{\sqrt{(t^2 - 3)^2 + 16t^2}} = \frac{3(t^2 - 3)}{t\sqrt{t^4 + 10t^2 + 9}} \quad (t > \sqrt{3}) \quad (\text{答})$$