

数 学

8 年 度(前期)

注 意

1. 「解答はじめ」というまで開いてはいけない。
2. 問題は1冊（本文2ページ、下書用紙2枚）、解答用紙は3枚である。下書用紙は問題冊子の中にはさみこんであるので引き抜いて使ってよい。
3. 全部の解答用紙に受験番号を書くこと。受験番号は次の要領で明確に記入すること。

(例) 受験番号 50001 番の場合 →

5	0	0	0	1
---	---	---	---	---

4. 解答は解答用紙の所定の位置に書くこと。他の所に書いても無効である。
5. 書き損じても、かわりの用紙は交付しない。
6. 試験終了後、問題冊子と下書用紙は持ち帰ること。

1

- (1) 2つの自然数の組 (a, b) は、条件

$$a < b \quad \text{かつ} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{4}$$

をみたす。このような組 (a, b) のうち、 b の最も小さいものをすべて求めよ。

- (2) 3つの自然数の組 (a, b, c) は、条件

$$a < b < c \quad \text{かつ} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{3}$$

をみたす。このような組 (a, b, c) のうち、 c の最も小さいものをすべて求めよ。

2

一次変換 f と点 $P(1, 0)$ に対し $Q = f(P)$, $R = f(Q)$ とおくと、点 Q は y 軸上にあり $f(R) = P$ である。

- (1) 平面上の任意の点 S に対し、 $f(f(f(S))) = S$ となることを示せ。
 (2) $\triangle PQR$ が二等辺三角形となるとき、一次変換 f を表す行列を求めよ。

3

y 軸上の点 $(0, a)$ を中心とする半径 r の円は、放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ と異なる2つの点で接する。すなわち2つの共有点を持ち、おのおのの共有点で、円に引いた接線と放物線に引いた接線とが一致する。

- (1) このような円が存在する r の範囲を求めよ。
 (2) a を r で表せ。
 (3) $r = 2$ のとき、円と放物線とで囲まれる部分の面積を求めよ。

4

三角すい $ABCD$ が $\triangle BCD$ を底面にして、机の上におかれている。辺の長さをそれぞれ

$$AB = 1, AC = \sqrt{2}, AD = \sqrt{5}, BC = \sqrt{3}, BD = \sqrt{6}, CD = 3$$

とする。

- (1) 三角すい $ABCD$ の体積を求めよ。
 (2) 三角すい $ABCD$ を、辺 CD を軸として、頂点 A が机につくまで回転させるとき、三角すいが通過する部分の体積を求めよ。

5

正四面体 ABCD の辺上を動くアリは、頂点を訪れた 1 秒後に他の頂点のいずれかをおのこの確率 $\frac{1}{3}$ で訪れる。最初に頂点 A にいるアリをその n 秒後まで観察する。

- (1) 頂点 A, B は訪れているが、頂点 C, D は訪れていない確率 p_n を求めよ。
- (2) 頂点 A, B, C は訪れているが、頂点 D は訪れていない確率 q_n を求めよ。
- (3) 全頂点を訪れている確率 r_n を求めよ。

ただし、(1), (2), (3)とも、最初にいる頂点 A は、訪れた頂点として考える。