

## 数 学

## 9 年 度(前期)

## 注 意

1. 「解答はじめ」というまで開いてはいけない。
2. 問題は1冊（本文2ページ，白紙2枚），解答用紙は3枚である。白紙は問題冊子の中にはさみこんであるので引き抜いて下書き用紙として使ってよい。
3. 全部の解答用紙に受験番号を書くこと。受験番号は次の要領で明確に記入すること。

（例） 受験番号 50001 番の場合 →

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 0 | 0 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|---|

4. 解答は解答用紙の所定の位置に書くこと。他の所にも書いても無効である。
5. 書き損じてても，かわりの用紙は交付しない。
6. 試験終了後，問題冊子と白紙は持ち帰ること。

1 すべての正の整数  $n$  に対して  $5^n + an + b$  が 16 の倍数となるような 16 以下の正の整数  $a, b$  を求めよ。

2 原点を中心とする半径  $r$  の円と放物線  $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$  との両方に接する直線のうちに、たがいに直交するものがある。 $r$  の値を求めよ。

3 平面上に 放物線  $y = x^2 - 5x + 6$  と 直線  $y = kax - a^2 - 5a$  がある。

(1) すべての実数  $a$  に対して放物線と直線が異なる 2 点で交わるような定数  $k$  の範囲を求めよ。

(2) (1)で求めた範囲にあって、放物線と直線で囲まれる部分の面積が  $a$  によらず一定になるような定数  $k$  を求めよ。

4 白球 15 個と赤球 4 個が箱に入っている。この箱から球を 1 個取り出す操作を繰り返す。ただし、取り出した球はもとに戻さない。

$n$  回めに取り出した球が 3 個めの赤球である確率を  $p_n$  とする。

$p_n$  が最大となる  $n$  を求めよ。

**5** 次の〔I〕, 〔II〕のいずれか一方を選択して解答せよ。

なお、解答用紙の所定の欄にどちらを選択したかを記入すること。

〔I〕 複素数平面上に 0 と異なる 3 点  $z_1, z_2, z_3$  があり、条件(ア), (イ), (ウ)をみたしている。

(ア)  $\arg z_1 = \arg z_2 + 120^\circ$

(イ) 点  $z_3$  は、2 点  $z_1, z_2$  を通る直線に関して 0 と反対側にある。

(ウ)  $\triangle z_1 z_2 z_3$  は正三角形である。

このとき、以下の問に答えよ。

(1)  $\alpha = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$  とするとき、

$$\alpha z_1 = p z_1 + q z_2$$

$$\alpha z_2 = s z_1 + t z_2$$

となる実数  $p, q, s, t$  をそれぞれ、 $|z_1|, |z_2|$  を用いて表せ。

(2)  $z_3 = a z_1 + b z_2$  となる実数  $a, b$  をそれぞれ、 $|z_1|, |z_2|$  を用いて表せ。

〔II〕 座標平面上に原点と異なる 3 点  $A, B, C$  があり、条件(ア), (イ), (ウ)をみたしている。

(ア) 点  $A$  は、半直線  $OB$  を原点  $O$  を中心として正の方向に  $120^\circ$  回転した半直線上にある。

(イ) 点  $C$  は、直線  $AB$  に関して  $O$  と反対側にある。

(ウ)  $\triangle ABC$  は正三角形である。

このとき、以下の問に答えよ。

(1)  $R = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix}$  とするとき、

$$R \overrightarrow{OA} = p \overrightarrow{OA} + q \overrightarrow{OB}$$

$$R \overrightarrow{OB} = s \overrightarrow{OA} + t \overrightarrow{OB}$$

となる実数  $p, q, s, t$  をそれぞれ、 $|\overrightarrow{OA}|, |\overrightarrow{OB}|$  を用いて表せ。

(2)  $\overrightarrow{OC} = a \overrightarrow{OA} + b \overrightarrow{OB}$  となる実数  $a, b$  をそれぞれ、 $|\overrightarrow{OA}|, |\overrightarrow{OB}|$  を用いて表せ。